Correction du DM n 6

Exercice 1 1. (a) i. On note $N=(\alpha_j m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$. La j-ème colonne de N est égale à la j-ème colonne de M multipliée par le réel α_j. Le déterminant étant linéaire par rapport à chaque colonne, on obtient

$$\det(N)=\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right)\det(M).$$

ii. On pose $R=(\alpha_i m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$. On remarque que $R^\top=(\alpha_j m_{ji})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ donc, d'après la question précédente, $\det(R^\top)=\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right)\det(M^\top)$. Or $\det(R^\top)=\det(R)$ et $\det(M^\top)=\det(M)$, on en déduit donc que $\det(R)=\det(N)$.

(b) On a

$$a_{1,1}=\binom{p}{p},\ a_{1,n-p+1}=\binom{n}{p},\ a_{n-p+1,1}=\binom{n}{n},\ a_{1,n-p+1}=\binom{2n-p}{n}$$

(c) On a

$$d_n=\det(1)=1$$

$$d_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & n\\ 1 & n+1\end{vmatrix}=1$$

$$\begin{aligned}
d_{n-2}&=\begin{vmatrix}1 & n-1 & \frac{n(n-1)}{2}\\ 1 & n & \frac{n(n+1)}{2}\\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}1 & n-1 & \dfrac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 1 & n+1\end{vmatrix}\ L_3\leftarrow L_3-L_2, L_2\leftarrow L_2-L_1\\
&=\begin{vmatrix}1 & n\\ 1 & n+1\end{vmatrix}\ \text{dvpt p}/C_1\\
&=1.
\end{aligned}$$

(d) i. On sait que $\binom{\beta}{\alpha}+\binom{\beta}{\alpha+1}=\binom{\beta+1}{\alpha+1}$ que l'on va utiliser sous la forme

$$\binom{\beta+1}{\alpha+1}-\binom{\beta}{\alpha}=\binom{\beta}{\alpha+1}$$

En notant $A'_p=(a'_{i,j})$ la nouvelle matrice, la formule précédente donne (on doit distinguer le cas de la première colonne)

$$\forall i\geqslant 2,\ a'_{i,1}=0\ \text{ et }\ a'_{i,j}=\binom{p+i+j-3}{p+i-1}$$

ii. Les opérations effectuées laissant le déterminant invariant, on a $\det(A_p)=\det(A'_p)$. En effectuant un développement par rapport à la première colonne, on obtient

$$d_p=\det(A'_p)=\det\left(\binom{p+i+j-3}{p+i-1}\right)_{2\leqslant i,j\leqslant n-p+1}$$

En opérant un changement d'indice ($i' = i-1$ et $j' = j-1$) ceci s'écrit

$$d_p = \det\left(\binom{p+1+i'+j'-2}{p+1+i'-1}\right)_{1\leqslant i',j'\leqslant n-(p+1)+1} = d_{p+1}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall p \in [|0,n|],\ d_p = d_n = 1$$

2. (a) On a

$$D_0 = \begin{vmatrix}1\end{vmatrix} = 1,\ D_1 = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1,\ D_2 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 6\\ 2 & 6 & 24\end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix}1\end{vmatrix} = 1,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix} = 1$$

(b) Comme $\displaystyle\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$, on peut factoriser chaque ligne de Δ_n par $\frac{1}{i!}$ puis chaque colonne par $\frac{1}{j!}$. Le déterminant étant multilinéaire, on a alors

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)^2 D_n$$

(c) On a

$$\Delta_n = \left(\binom{i+j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\binom{i'+j'-2}{i'-1}\right)_{1\leqslant i',j'\leqslant n+1} = d_0 = 1$$

et donc

$$D_n = \prod_{k=0}^{n}(k!)^2$$