Dénombrement et probabilités finies

1 Combinatoire

2 Cardinal

Définition 1. Lorsqu'un ensemble compte un nombre fini d'éléments, on appelle cardinal de E ce nombre et on le note $\text{Card}(E)$ (ou $\#E$).

Par convention, l'ensemble vide est de cardinal 0 et c'est le seul ensemble contenant 0 éléments.

Exemples 1.

1. *Quel est le cardinal de* $[\![0, n]\!]$ *?*
2. *Quel est cardinal de* $\{k \in [\![0, n]\!],\ k \text{ pair }\}$ *?*
3. *Soit* $p \geqslant 2$*, quel est cardinal de* $\left\{(i, j) \in (\mathbb{N}^\star)^2, i + j = p\right\}$ *?*

Proposition 1 (admis)**.** *Soit F un ensemble fini et $E \subset F$ alors E est fini et*

- $\mathit{Card}(E) \leqslant \mathit{Card}(F)$
- *si* $\mathit{Card}(E) = \mathit{Card}(F)$ *alors* $E = F$

Proposition 2.
Soit E et F deux ensembles finis,

- $E \cup F$ est fini
- Si $E \cap F = \emptyset$ alors $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$.
- Si $E \subset F$, on a $\text{Card}(F \setminus E) = \text{Card}(F) - \text{Card}(E)$.
- $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$.

Si $E_1, \ldots, E_n$ désigne des ensembles finis alors

- Si les ensembles sont disjoints, on a $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(E_i)$.
- Dans le cas général, on a $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(E_i)$.

Exemples 2.

1. *Quel est cardinal de* $\{(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, (i - j)^2 = 1\}$ *?*
2. *Soit* $p \geqslant 3$*, quel est le cardinal de* $\left\{(i, j, k) \in (\mathbb{N}^\star)^3, i + j + k = p\right\}$ *?*

Proposition 3.
- $E \times F$ est fini et de cardinal $\mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.
- Si $E_1, \ldots, E_n$ désigne des ensembles finis alors $\mathrm{Card}(E_1 \times \ldots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i)$.

Exemples 3.
1. *Quel est le cardinal de* $\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$*?*
2. *Quel est le cardinal de* $\{(x_1, \ldots, x_p), \forall i \in [\![1,p]\!], x_i \in [\![0,n]\!]\}$*?*

2.1 Cardinal et fonction

Proposition 4.
Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application, alors $\mathrm{Im}(f)$ est un ensemble fini et
$$\mathrm{Card}(\mathrm{Im} f) \leqslant \min(\mathrm{Card}(E), \mathrm{Card}(F))$$

Proposition 5.
Soit $f : E \to F$ une application avec $\mathrm{Card}(E) = n$ et $\mathrm{Card}(F) = m$.
- Si f est injective, alors $n \leqslant m$.
- Si f est surjective, alors $n \geqslant m$.
- Si f est bijective alors $n = m$.

Exemple 4. *Quel est le cardinal de* $\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j\}$*?*

Proposition 6.
Soit E et F deux ensembles finis avec $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$ alors il n'existe pas d'injection de E dans F.

C'est le principe des tiroirs: si un meuble contient p tiroirs et qu'on y place n chaussettes avec $n > p$, alors il y a un tiroir contenant deux chaussettes.

Exemple 5. *Dans une groupe de 20 enfants, peut-on affirmer que deux enfants sont nés le même mois?*

Proposition 7.
Soit E et F de même cardinal n et $f : E \to F$. Alors
$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

Proposition 8 (principe des bergers)**.** *Soit $f : E \to F$ une fonction entre deux ensembles finis. On suppose que tout élément de F admet k antécédents distincts, alors*
$$Card(E) = k Card(F).$$

Si un troupeau compte n moutons, il y a 4n pattes.

2.2 Cardinaux particuliers

Proposition 9.
Un ensemble fini à n éléments possède 2^n parties. Autrement dit, si E est fini de cardinal n, alors $\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Définition 2. Soit E un ensemble et p un entier non nul. Une p-liste d'éléments de E est un p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E.

Proposition 10.
Soit E un ensemble à n éléments et $p > 0$ un entier.

- Il existe n^p p-listes d'éléments de E.
- Il existe $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-listes d'éléments distincts de E.

Exemple 6. *Combien y a-t-il d'applications de* $[\![1, n]\!]$ *dans* $[\![1, p]\!]$*?*

Définition 3. Soit E un ensemble fini. On appelle permutation de E une bijection de E dans lui-même.

Proposition 11.
Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est $n!$.

Proposition 12.
Soit n un entier naturel non nul et $p \leqslant n$. Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E possédant exactement p éléments est $\binom{n}{p}$ si $p \leqslant n$, 0 sinon.

Proposition 13 (Lemme du capitaine)**.** *Soit* $0 < k \leqslant n$*, alors*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

3 Vocabulaire des probabilités

3.1 Définitions

Définition 4. Une expérience est aléatoire si l'on ne peut prédire avec certitude son résultat.
On appelle univers ou univers des possibles, l'ensemble des résultats possibles de l'expérience. On le note généralement Ω et on appelle éventualité un élément de Ω.

Dans toute la suite, on se limite au cas où Ω est un ensemble fini.

Exemples 7.

1. *On lance un dé à 6 faces :* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = [\![1, 6]\!]$.

2. *On lance deux dés à 6 faces distinguables :* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = [\![1, 6]\!]^2$.

3. *On lance 1 fois une pièce :* $\Omega = \{P, F\}$ *ou* $\Omega = \{0, 1\}$ *avec la convention que "1 " représente "pile", et "0" représente "face".*

4. *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$. *On lance n fois une pièce :* $\Omega = \{P, F\}^n$ *ou* $\Omega = \{0, 1\}^n$ *avec la convention que "1 " représente "pile", et "0" représente "face".*

5. *Soit* $(n, M) \in \mathbb{N}^2$. *On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule, dans une urne de M boules.*

6. *Soit* $(n, M) \in \mathbb{N}^2$. *On effectue n tirages successifs sans remise d'une boule, dans une urne de M boules (dans ce cas* $n \leqslant M$*)*

7. *On effectue 1 tirage de n boules prises simultanément dans une urne de M boules (dans ce cas* $n \leqslant M$*).*

8. *On mélange une jeu de n cartes.*

Définition 5. Un évènement aléatoire est un évènement qui peut se produire ou non, selon le résultat de l'expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des éventualités qui le réalisent. On l'identifie à une partie de Ω.

Définition 6. L'évènement Ω est appelé l'évènement certain, $\emptyset$ est l'évènement impossible.

Exemples 8.

1. *On lance un dé à 6 faces :* $\Omega = [\![1, 6]\!]$. *Traduire les évènements*
   - A = *" obtenir un 6"*
   - B = *"obtenir un nombre pair"*

2. *On lance deux dés à 6 faces distinguables :* $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. *Traduire les évènements:*
   - A = *"obtenir un double 6"*
   - B = *"obtenir un double"*
   - C = *" obtenir au moins un 6"*

3. *On mélange un jeu de n cartes :* $\Omega = \{\omega : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!], \omega bijective\}$.
   A = *"la première carte se retrouve dans la première moitié du paquet"*

On voit sur ces exemples qu'un évènement A est nécessairement une partie de Ω c'est-à-dire que $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 7. Un singleton est appelé évènement élémentaire.

Remarque. *tout évènement A est réunion d'évènements élémentaires.*

3.2 Opérations sur les évènements

Définition 8. Soient A et B deux évènement

1. **Contraire** L'évènement $\overline{A}$ est appelé contraire de A. Pour tout $\omega \in \Omega, \omega \in \overline{A} \Leftrightarrow \omega \notin A$. Autrement dit : $\overline{A}$ est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.

2. **Union** Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A$ ou $\omega \in B$. Autrement dit : $A \cup B$ est réalisé si et seulement si A est réalisé ou B est réalisé

3. **Intersection** Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \in B$. Autrement dit : $A \cap B$ est réalisé si et seulement si A est réalisé et B est réalisé

4. **Différence** Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \cap \overline{B} \Leftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \notin B$. Autrement dit : $A \cap \overline{B}$ est réalisé si et seulement si A est réalisé et B n'est pas réalisé.

5. **Implication** $A \subset B$ signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$.
Autrement dit : A est réalisé implique B est réalisé.

6. **Différence symétrique** Pour tout $\omega \in \Omega$: $\omega \in A \Delta B \Leftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \notin B$ ou $\omega \in B$ et $\omega \notin A$. Autrement dit, A est réalisé ou exclusif B est réalisé.

Proposition 14.
Si A, B et C sont des évènements :

- $A \setminus B \subset A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
- $A \cup \Omega = \Omega$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $\Omega \cap A = A$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Proposition 15 (Généralisation pour une famille d'évènements). *Soit* $(A_i)_{i \in I}$ *une famille d'évènements*

- $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.
- $B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$
- $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$.
- $B \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

- L'évènement $\bigcup_{i \in I} A_i$ correspond à l'évènement "au moins un des A_i est réalisé".
- L'évènement $\bigcap_{i \in I} A_i$ correspond à l'évènement "tous les A_i sont réalisés".
- L'évènement $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ correspond à l'évènement "aucun des A_i n'est réalisé".

3.3 Évènements incompatibles

Définition 9. Deux évènements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent être réalisés simultanément. Autrement dit, si Ω est un univers fini et A et B sont deux évènements de Ω, alors A et B sont incompatibles s'ils sont disjoints c'est-à-dire :

$$A \cap B = \emptyset.$$

Exemples 9.

1. *$A=$ "tirage pair", $B=$"tirage impair" lors d'un lancer de dé à six faces.*
2. *On tire trois cartes d'un jeu de 32 cartes. $A=$"trois cartes de même couleur", $B=$"brelan".*

3.4 Système complet d'évènements

Définition 10. Soit Ω un univers fini. Un système complet d'évènements est une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements deux à deux incompatibles et recouvrant Ω. Autrement dit, on a :

- $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$;
- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

Intuitivement, un système complet d'évènements correspond à une disjonction de cas.

Exemples 10.

1. *A et $\overline{A}$.*
2. $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$.
3. *Si l'expérience est un match de foot, un système complet est* $(\{\textit{match gagné}\}, \{\textit{match perdu}\}, \{\textit{match nul}\}, \{\textit{forfait}\})$.

Proposition 16.
Soit B un évènement et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'évènements, alors B est la réunion disjointe :

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\,.$$

4 Probabilités

4.1 Définitions et premières propriétés

Définition 11. Soit Ω un univers fini. Une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ est appelée probabilité sur Ω si elle vérifie :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tel que $A \cap B = \emptyset$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On appelle espace probabilisé fini la donnée d'un univers fini Ω et d'une probabilité sur Ω.

Remarque : à un même univers, on peut attribuer des probabilités différentes. Par exemple, si on lance un pièce, l'univers des possibles est {pile, face}. Si La pièce est équilibrée, la probabilité d'avoir pile et celle d'avoir face sont égales à $\frac{1}{2}$. Ce n'est pas le cas si la pièce n'est pas équilibrée.

Définition 12. Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et A un évènement de Ω. On dit que A est négligeable si $\mathbb{P}(A) = 0$.

Propriétés des probabilités finies :
Soient Ω un univers fini, A et B deux évènements de Ω et P une probabilité sur Ω. On a :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
3. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
5. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Remarque : Si A et B sont incompatibles, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Le résultat se généralise à une famille d'évènements incompatibles :

Proposition 17.
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'évènements deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Proposition 18 (Inégalité de Boole)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout famille finie $(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Mais la plupart du temps le membre de droite est supérieur à 1, ce n'est pas très intéressant en pratique. On peut aussi utiliser la formule exacte suivante,mais les calculs sont lourds.

Théorème 19 (Formule du crible)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout famille finie $(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$

Exemples 11.

1. *On mélange n cartes et on note A = "aucune carte ne retrouve sa position initiale", calculer* $\mathbb{P}(A)$.

2. *p personnes entre dans l'ascenseur d'un immeuble de n étages (sans compter le RDC) et descendent chacune à un des n étages. On note A = " À chaque étage au moins une des personnes est descendue", déterminer* $\mathbb{P}(A)$.

4.2 Construction d'une probabilité

Remarque : Si on connaît la probabilité des évènements élémentaires, on connaît la probabilité. En effet, toute partie (finie) de Ω est la réunion (finie) d'évènements élémentaires.

Théorème 20.
On note $n = \#\Omega$ et $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

1. Soit P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec Ω fini. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $p_i = P(\{\omega_i\})$. Alors les réels $p_1, \ldots, p_n$ sont dans [0,1] et vérifient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

2. Réciproque. On se donne des réels $p_1, \ldots, p_n$ positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = P(\{\omega_i\})$. Et donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \in [0, 1]$.

Cette probabilité P vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i$$

En pratique, il suffit donc de connaître la probabilité des évènements élémentaires, pour être capable de calculer la probabilité de n'importe quel évènement.

Exemples 12.

1. *On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On définit une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ par : $p_1 = p_2 = p_3 = \dfrac{1}{12}$ et $p_4 = p_5 = p_6 = \dfrac{1}{4}$ ce qui modélise un dé truqué. On a alors $\mathbb{P}($ "Chiffre pair" $) = \dfrac{7}{12}$.*

2. *On suppose qu'un dé est truqué et la probabilité d'obtenir k est proportionnelle à k. Déterminer la probabilité d'avoir 1.*

Définition 13. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On dit que P est une probabilité uniforme si elle prend la même valeur pour tout évènement élémentaire. On a alors :

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega},$$

et

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Dans ce cas, pour calculer la probabilité d'un évènement aléatoire, on compte le nombre de cas "favorables" (ceux pour lesquels l'évènement est réalisé) et on divise par le nombre de cas possibles.

Exemple 13. *Probabilité d'avoir un carré en tirant quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.*

4.3 Probabilité conditionnelle

Intuitivement : si on lance un dé cubique, équilibré, on devine que sachant que le chiffre obtenu est pair, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 est égale à $\frac{2}{3}$. D'autre part, si on introduit les évènements A ="obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 ", B = " obtenir un chiffre pair ". Comme on est en situation d'équiprobabilité, on trouve $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6}$.

On remarque alors que

$$\frac{2}{3} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Cet exemple motive la définition suivante.

4.3.1 Définitions

Définition 14. Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et A et B deux évènements de Ω avec A non négligeable. On appelle probabilité de B sachant A le réel noté $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B|A)$ égal à $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.
On a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B),}$$

et, si l'on suppose de plus B non négligeable, on a :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ (inversion des conditionnements) .}$$

Exemple 14. *On suppose que dans une population donnée comptant autant de filles que de garçons, on a 10% de gens malades et qu'on a 1 chance sur 8 d'attraper la grippe quand on est une fille. Qu'elle est la probabilité pour qu'un malade soit une fille?*

Théorème 21.
Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$.
2. $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. En particulier si A_1 et A_2 sont deux évènements

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) - \mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2) et \mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A).$$

4.3.2 Formule des probabilités composées

Théorème 22 (Formule des probabilités composées)**.** *Soient* (Ω, P) *un espace probabilisé fini et* $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille d'évènements de* Ω *telle que* $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$. *Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ldots\mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Cette formule est utilisée, en particulier, quand les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont chronologiques.

Exemples 15.

1. *On considère une urne composée de* 6 *boules blanches et* 7 *boules rouges. On effectue 3 tirages successifs d'une boule sans remise. Pour* $i = 1, 2, 3$, *on pose* B_i="le i-ième tirage donne une boule blanche" *et on définit de même les évènements* R_i.

2. *On place r boules blanches et n boules noires dans une urne et on effectue 4 tirages successifs, sans remise lorsque la boule tirée est blanche.*

   (a) *Quelle est la probabilité de tirer 4 boules blanches?*

   (b) *Quelle est la probabilité de ne tirer qu'une et une seule boule blanche?*

4.3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 23 (Formule des probabilités totales)**.** *Soit* (Ω, P) *un espace probabilisé fini et* $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *un système complet d'évènements non négligeables, alors pour tout évènement* B, *on a :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i).$$

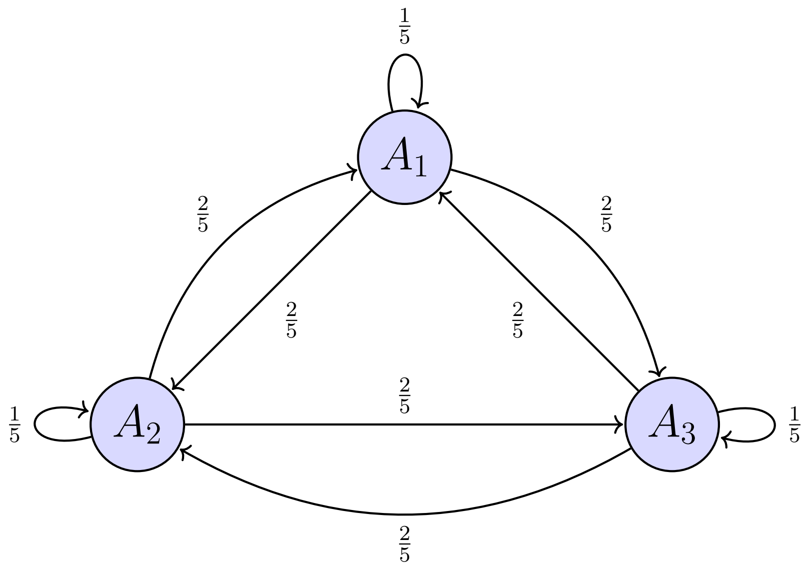
Exemples 16.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}\star$. *Une urne* U *contient 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2 etc n jetons numérotés n. On dispose de n autres urnes numérotées de 1 à n telles que l'urne i contient i boules blanches et* $n - i$ *boules noires. On tire un jeton dans l'urne* U. *Si on tire un jeton numéroté i, on pioche une boule dans l'urne numérotée i. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche?*

2. *On considère un point qui se déplace sur les sommets d'un triangle* $A_1A_2A_3$. *On suppose qu'initialement, il se trouve en* A_1. *Ensuite, les déplacements s'effectuent de la manière suivante : Si le point est en* A_i, *alors*

   - *il passe en* A_j *avec* $j \neq i$ *avec une probabilité de* $\dfrac{2}{5}$ *dans les deux cas.*
   - *il reste en* A_i *avec une probabilité de* $\dfrac{1}{5}$.

On peut résumer la situation grâce à un diagramme de transition :



On introduit l'évènement U_n (resp. V_n et W_n) : " être en A_1 (resp. A_2 et A_3) après n déplacements et on note les probabilités de ces évènements u_n, v_n et w_n. Avec la formule des probabilités totales, on arrive à exprimer, pour tout entier n, u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_n, v_n et w_n. L'expression du terme général de chaque suite s'obtient en calculant la puissance d'une matrice.

4.3.4 Formule de Bayes

Théorème 24 (Formule de Bayes)**.** *Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'évènements non négligeables, alors pour tout évènement non négligeable B, et pour tout entier $j \in [|1, n|]$ on a :*

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}.$$

Remarque: Lorsqu'on applique la formule au système complet d'évènements composé d'un élément A et de son contraire $\overline{A}$, on obtient :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}.$$

Exemple 17. *On reprend le même exemple que pour la formule des probabilités totales. Quelle est la probabilité pour qu'une boule ait été tirée de l'urne 1 sachant qu'elle est blanche?*

5 Évènements indépendants

5.1 Indépendance de deux évènements

Définition 15. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On dit que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité P si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B).$$

En particulier, si B est non négligeable, on a A et B indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$.

Proposition 25.
Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants (de même pour $\overline{A}$ et B et pour $\overline{A}$ et $\overline{B}$).

5.2 Indépendance mutuelle

On peut généraliser la notion à une famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'évènements:

Définition 16. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'évènements on dit qu'ils sont deux à deux indépendants si :

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j), \forall i \neq j.$$

Par contre, on ne peut rien dire sur la probabilité, par exemple, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, on a besoin d'une notion plus forte :

Définition 17. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'évènements on dit qu'ils sont mutuellement indépendants lorsque

$$\forall J \subset [\![1, n]\!], \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k).$$

Dans ce cas, on peut dire que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$.

Remarque: Des évènements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants, la réciproque est fausse.

Exemple 18. *On jette deux dés équilibrés, un rouge et un bleu. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants :*

- *" le chiffre du dé rouge est impair"*
- *" le chiffre du dé bleu est pair"*
- *" les chiffres des deux dés ont même parité".*