Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026

Programme de colles: semaine 16.
semaine démarrant le 2 février

Question de cours:

- Si f est dérivable alors f est lispchitzienne si et seulement si f' est bornée.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Alors f dérivable en x_0 ssi f admet un DL1 en x_0.
- thm des extrema locaux (énoncé et preuve)
- Montrer que la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL2 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Nous avons vu :

- La définition de limite finie/infinie en un point a/∞ avec des quantificateurs.
- Les opérations sur les limites.
- Si $f > a$ alors $\lim f \geqslant a$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > a$ alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f > a$
- Le thm des gendarmes
- Caractérisation séquentielle, application à montrer qu'une limite n'existe pas.
- thm de la limite monotone.
- Définition de continuité, opérations sur les fonctions continues.
- caractérisation séquentielle de la continuité.
- Image d'un intervalle par une fonction continue, TVI (énoncé avec $f(a)f(b) < 0$).
- Continuité sur un segment
- Continuité de la bijection réciproque
- Prolongement par continuité.
- Définition de dérivable en un point, dérivable sur un intervalle, dérivable à gauche ou à droite.
- Une fonction est dérivable en un point ssi elle admet un DL1 en ce point.
- Signe de la dérivée et monotonie de la fonction.
- Opérations sur les fonctions dérivables.
- Si f est dérivable et admet un extremum local en un point intérieur, alors la dérivée en ce point est nulle.
- thm de la limite de la dérivée.
- Thm de Rolle
- Thm des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis.
- Dérivées successives, thm de Leibniz.

- Définition de classe C^p, classe C^∞.
- Fonctions convexes, caractérisation avec la dérivée quand elle existe.
- Formule de Taylor-Young
- Opérations sur les DL
- équation de la tangente et position à l'aide d'un DL.
- développement asymptotique, recherche d'asymptote et position.

⚠ La convexité s'énonce seulement avec deux points (et pas avec n points) ce qui limite les exercices :-(

Pas de formule Taylor avec reste intégral !