Devoir surveillé 5.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1. On étudie la fonction de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

Partie I

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution.
2. En déduire l'image de f.
3. Soit $a \in \operatorname{Im} f$ tel que l'équation $f(x) = a$ admette deux solutions distinctes x_1 et x_2. Montrer que, quitte à les renommer, on a $|x_1| < 1$ et $|x_2| > 1$.
4. En déduire que f induit une bijection que l'on notera g.
5. Expliciter g^{-1}.

Partie II

On construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que f est croissante sur $[0,1]$ et en déduire que $\forall n \geqslant 1, 0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de u_n.
   (b) En déduire que, $\quad \forall k \geqslant 1, 2 \leqslant v_k \leqslant 2 + \dfrac{1}{k}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En sommant les inégalités de la question précédente pour k variant de 1 à $n-1$, montrer que
   $$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
5. Montrer que , $\ln(1+x) \leqslant x$, $\forall x > -1$.
6. En déduire que $\forall k \geqslant 2$, $\ln k - \ln(k-1) \geqslant \dfrac{1}{k}$
7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En sommant ces inégalités, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$.
8. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

Exercice 2. Soit m un réel strictement positif, soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité d'ordre 3.

1. (a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$M^2 = aM + bI.$$
   (b) En déduire que la matrice M est inversible et préciser son inverse.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que pour $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$, $M - \lambda I$ est non inversible et résoudre $MX = \lambda X$.

2. On pose : $P = \frac{1}{3}(M+I)$ et $Q = -\frac{1}{3}(M-2I)$.
   (a) Calculer PQ et QP
   (b) Calculer P^2 et Q^2, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P^n et Q^n.
   (c) Exprimer M en fonction de P et Q.
   (d) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de P et Q.
   (e) On note,$\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{-n} = \left(M^{-1}\right)^n$. La formule précédente reste-t-elle valable si n est dans $\mathbb{Z}$?
   (f) Déterminer deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$M^n = a_n I + b_n M.$$

Exercice 3. Dans cet exercice, à toute suite réelle $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = t_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\, u_n + t_{n+1} \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question seulement que la suite t est constante à 1.
   Déterminer alors l'expression de u_n en fonction de n, ainsi que la limite de u.
2. On revient au cas général où t est une suite quelconque.
   Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{2^{n-k}}$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n-k}} = 2 - \frac{1}{2^n}$.
   (b) En déduire que si la suite t est bornée, alors u l'est aussi.
4. On suppose dans cette question seulement que t est croissante, à termes tous strictement positifs.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \leqslant u_n \leqslant 2t_n$.
   (b) En déduire que u est aussi croissante.
   (c) Montrer que si t est majorée, alors les deux suites t et u sont convergentes, et donner une relation entre leurs deux limites.
   (d) Montrer que si t n'est pas majorée, $\ln(t_n)$ et $\ln(u_n)$ sont équivalentes.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$.
   (a) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que la suite de terme général $v_k = (ak+b)2^k$ vérifie :

   $$\forall k \in \mathbb{N}, v_{k+1} - v_k = k2^k$$

   et déterminer la valeur de S_n.
   (b) En déduire un équivalent de S_n.
6. Dans cette question seulement, on suppose que $t_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.
7. Dans cette question seulement, on suppose que $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et on va démontrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.
   (a) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $w_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n)$. Montrer qu'alors $\sum_{k=0}^{n} 2^k w_k = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(S_n)$.
   Indication : Écrire la négligeabilité de (w_n) à l'aide d'une suite qui tend vers 0 et démontrer que $\frac{\sum_{k=0}^{n} 2^k w_k}{S_n}$ tend vers 0 avec des quantificateurs, en scindant la somme en deux.

(b) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

Exercice 4. Soient p et n deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.
On rappelle la notation :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1. **Préliminaires :** Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ une matrice de $M_m(\mathbb{R})$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ des réels. On note $N = (\alpha_j m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ et $R = (\alpha_i m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$.
   (a) Exprimer $\det(N)$ en fonction de $\det(M)$.
   (b) A-t-on $\det(R) = \det(N)$?
2. **Déterminant d_p.**
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $M_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$ avec $(i,j) \in [\![1, n-p+1]\!]^2$. On note $d_p = \det(A_p)$.
   (a) Expliciter les entiers r et s tels que $a_{i,j} = \binom{s}{r}$ pour les quatre coefficients $a_{1,1}$, $a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$.
   (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer les déterminants d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.
   (c) On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i.
      i. Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes : pour i variant de 2 à $n-p+1$, on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée : $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$). Déterminer le coefficient d'indice (i,j) de la nouvelle ligne L_i.
      ii. En déduire une relation entre d_p et d_{p+1}, puis en déduire d_p.
3. **Déterminants D_n et Δ_n**
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le déterminant de la matrice carrée $M_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de** 0 **à** n**.**
   On note $D_n = \det((i+j)!)$. Avec les mêmes notations, on note $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)$ pour $(i,j) \in [\![0, n]\!]^2$. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Calculer les déterminants D_0, D_1, D_2, Δ_0, Δ_1 et Δ_2.
   (b) Donner une relation entre D_n et Δ_n.
   (c) En déduire Δ_n puis D_n.

Correction du DS n 5

Correction 1 *On étudie la fonction de* $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ *dans* $\mathbb{R}$*, donnée par* $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

Partie I :

1. *Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution.*
   $f(x) = a \Leftrightarrow ax^2 + (2a-1)x + a = 0$.
   Si $a = 0$ il n'y a que $x = 0$. Si $a \neq 0$, on calcule le discriminant $\Delta = -4a+1$. Ainsi a admet au moins un antécédent **réel** par f ssi $a \leqslant 1/4$.
   On peut aussi tracer le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$		$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

2. *En déduire l'image Imf de f, c'est-à-dire $f(\mathbb{R}\setminus\{-1\})$.*
   L'image est donc $]-\infty, 1/4]$.

3. *Soit $a \in Imf$ tel que l'équation $f(x) = a$ admette deux solutions distinctes x_1 et x_2. Montrer que, quitte à les renommer, on a $|x_1| < 1$ et $|x_2| > 1$.*
   On choisit donc a dans $\operatorname{Im} f$, mais non nul (car sinon il n'y a qu'une seule solution) et différent de $1/4$ (car sinon, $x_1 = x_2$ et il n'y a donc qu'une solution). Dans ce cas, les deux solutions sont les deux racines de l'équation de degré 2 ci-dessus, dont on sait que le produit est $x_1x_2 = a/a = 1$. D'où $|x_1||x_2| = 1$. Il reste à prouver que ces deux valeurs absolues ne sont pas égales à 1. Mais puisque -1 n'est pas solution de l'équation, x_1 et x_2 ne peuvent avoir pour valeur absolue 1, car sinon elles seraient égales (à 1), ce qui est exclu. Résumons : $|x_1|$ et $|x_2|$ sont deux réels strictement positifs, distincts de 1 et dont le produit vaut 1 donc l'un est strictement supérieur à 1 et l'autre strictement inférieur 1.
   On pouvait aussi chercher de manière plus explicite laquelle des deux racines était de module strictement inférieur à 1 (ce qui sera utile pour la question 5) :
   Soit $a \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right[$ et $a \neq 0$, les deux antécédents distincts de a par f sont $\dfrac{1-2a \pm \sqrt{1-4a}}{2a}$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2a}\right| < 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \left|1-2a-\sqrt{1-4a}\right| < 2|a| \\
\Leftrightarrow\quad & (1-2a)^2 - 2(1-2a)\sqrt{1-4a} + 1 - 4a < 4a^2 \text{ par positivité des quantités} \\
\Leftrightarrow\quad & 2(1-4a) - 2(1-2a)\sqrt{1-4a} < 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{1-4a} < (1-2a) \text{ car } \sqrt{1-4a} > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 1-4a < 1-4a+4a^2 \text{ car } 1-2a > 0 \text{ pour } a \leqslant \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & 0 < 4a^2
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, on en déduit qu'en posant $x_1 = \dfrac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{2a}$, on a $|x_1| < 1$ et $|x_2| > 1$.

4. *En déduire que f induit une bijection que l'on notera g.*

   Montrons que $g = f|_{[-1,1[}^{\left]-\infty,\frac{1}{4}\right]}$ convient. L'application g ainsi définie est bien surjective d'après la question précédente. En effet, soit $a \leqslant 1/4$:
   — Si $a < 1/4$ et $a \neq 0$, $f(x_1) = a$;
   — Si $a = 1/4$, $f(1) = 1/4$,
   — Si $a = 0$, $f(0) = 0$.
   g est aussi injective car le deuxième antécédent de a (lorsqu'il existe) est de module strictement supérieur à 1, donc pas dans $]-1,1]$.
   n'importe quelle bijection induite vous aurait donné les points. Il est très surprenant que même avec le tableau de variations(pour ceux et celles qui l'ont tracé), vous n'avez pas su me donner une bijection induite. Niveau rédaction, certains commencent par me dire qu'il faut restreindre à l'image : NON! on commence par restreindre l'espace de départ pour que la fonction devienne injective puis on prend l'image de ce nouvel espace de départ pour rendre la fonction bijective. Donc si vous décidez de restreindre à $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, vous avez le droit mais 0 n'appartient plus à l'image de cet ensemble! La bijection induite est donc $|_{]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}^{\left]-\infty,\frac{1}{4}\right]\setminus\{0\}}$. Beaucoup m'ont écrit n'importe quoi en mélangeant espaces de départ et d'arrivée, c'est inquiétant.

5. *Expliciter g^{-1}.*

   J'ai déjà montré que $x_1 = \dfrac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2a}$ donc on en déduit : On en déduit,

$$\boxed{g^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\infty,\dfrac{1}{4}\right] & \longrightarrow &]-1,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}, \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array} \right.}$$

   Si vous n'aviez pas explicité x_1 et x_2 (en vous appuyant sur le tableau de variations par exemple pour traiter toutes les questions précédentes), vous auriez pu dire : f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc injective et $f([1,+\infty[) = \left]0,\dfrac{1}{4}\right]$ donc $h = f|_{[1,+\infty}^{\left]0,\frac{1}{4}\right]}$ est bijective et

$$\forall a \in \left]0,\frac{1}{4}\right], \frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{2a} = 1 + \frac{1-4a+\sqrt{1-4a}}{2a} \geqslant 1,$$

   donc l'unique antécédent de $a \in \left]0,\dfrac{1}{4}\right]$ appartenant à $[1,+\infty[$ est $\dfrac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{2a}$ d'où

$$h^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]0,\dfrac{1}{4}\right] & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1-2x+\sqrt{1-4x}}{2x} \end{array} \right. .$$

Partie II :

On construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. $u_1 = 1/4$ et $u_2 = 4/25$.

2. *Montrer que f est croissante sur $[0,1]$ et en déduire par récurrence que $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}, \forall n \geqslant 1$.*

Pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} = \dfrac{1-x^2}{(1+x)^4} \geqslant 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, donc f est strictement croissante.

Pour $n = 1$, je vous le laisse. Si le prédicat est vrai au rang n, alors par stricte croissance de f, $f(0) < f(u_n) \leqslant f(1/n)$, et donc $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{n}{(n+1)^2} \leqslant \dfrac{n+1}{(n+1)^2} = \dfrac{1}{n+1}$. La propriété est héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Si f est seulement croissante, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n} \Rightarrow 0 \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et vous n'obtenez pas l'inégalité stricte.

3. *Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.*

Par le théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et tend vers 0.

J'ai vu beaucoup de thm de limite monotone puis unicité de la limite, ce qui est juste mais très complique!

4. *On pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.*

   (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de u_n.*

$$v_n = \frac{1}{f(u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{(1+u_n)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \boxed{2 + u_n}.$$

   (b) *En déduire que $2 \leqslant v_k \leqslant 2 + \frac{1}{k}, \forall k \geqslant 1$.*

   Il suffit d'utiliser la question précédente et le fait que $u_k \leqslant \dfrac{1}{k}$ d'après ce qui précède.

   (c) *En sommant les inégalités de la question précédente pour k variant de 1 à $n-1$, montrer que*

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

   Commençons par remarquer la série télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_n} - 4.$

   Maintenant, obéissons docilement. De la double inégalité précédente, nous tirons :

$$\begin{aligned} & 2(n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} v_k \leqslant 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ \Rightarrow \quad & 2(n-1) \leqslant u_n - 4 \leqslant 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

   et ça tombe tout seul.

Attention à ne pas écrire seulement une suite d'équivalences sans conclure. Par ailleurs,

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], 2 \leqslant v_k \leqslant 2 + \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{k}\right)$$

mais ce n'est PAS une équivalence.

5. *Montrer que* $\ln(1+x) \leqslant x, \forall x > -1$.
   La dérivée de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ nous montre qu'elle décroit de -1 à 0, où elle s'annule, puis elle croit, donc elle est toujours positive. On pouvait aussi dire "par concavité du ln" ou bien montrer que l'inégalité souhaitée était équivalente à $\forall x > -1, 1+x \leqslant e^x$ qui est vraie par convexité de la fonction exponentielle.

6. *En déduire que* $\ln k - \ln(k-1) \geqslant \frac{1}{k}, \forall k \geqslant 2$.
   $\ln k - \ln(k-1) = -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \geqslant -\left(-\frac{1}{k}\right)$, car $-1/k > -1$.

   C'est ultra-classique (et on l'a déjà vu), à savoir refaire les yeux fermés.

7. *En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à n, montrer que* $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$.

   $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\ln k - \ln(k-1)\right) = 1 + \ln(n-1) - \ln 1 \leqslant 1 + \ln n$.

   Il faut sommer de 2 à n puis rajouter le terme en 1 car $\ln(k-1)$ n'est pas défini pour $k = 1$

   On peut aussi sommer de 1 à n (enfin de 2 à n puis rajouter 1) et remarquer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

8. *Déduire des questions précédentes que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.
   De la question 4(c), nous tirons :
$$\frac{2(n+1)}{n} \leqslant \frac{1}{nu_n} \leqslant \frac{2(n+1)}{n} + \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}{n}.$$
   Et de la précédente,
$$2 + \frac{2}{n} \leqslant \frac{1}{nu_n} \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$
   On conclut avec le théorème d'encadrement car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ par le thm de croissances comparées.

Correction 2 1. (a) Le calcul matriciel donne :
$$M^2 = \begin{pmatrix} m/m + m^2/m^2 & 0+0+m/m^2 & 0+1/m^2+0 \\ 0+0+m^2/m & m/m+0+m/m & m/m^2+0+0 \\ 0+m^2+0 & m^2/m+0+0 & m^2/m^2+m/m+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix},$$
soit $M^2 = M + 2.I$

(b) On en déduit : $M^2 - M - 2 \cdot I = 0$ donc $M(M-I) = 2I$. La matrice M est donc inversible et son inverse vaut $\frac{1}{2}(M-I)$.

C'est vraiment dommage d'avoir perdu du temps à calculer la matrice inverse alors que cela tombe tout seul.

(c) On a $M^2 - M - 2I = (M+I)(M-2I) = (0)$. On en déduit que les deux matrices $M+I$ et $M-2I$ sont non inversibles. La plupart d'entre vous ont calculé le déterminant, ont trouvé un déterminant nul et en ont déduit que les deux matrices étaient non inversibles.

Ce n'était pas nécessaire de se pencher sur le côté non inversible avant de résoudre le système (la non-inversibilité va apparaître en résolvant le système) mais comme vous avez majoritairement échoué à résoudre les deux systèmes, c'était un bon moyen de prendre une partie des points.

On peut aussi les expliciter : $M+I=\begin{pmatrix} 1 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 1 & 1/m \\ m^2 & m & 1 \end{pmatrix}$ est clairement non-inversible, puisque les trois lignes de cette matrice sont proportionnelles : $L_3 = m.L_2 = m^2.L_1$.
On résout le système associé :

$$(M+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+1/m\cdot y+1/m^2\cdot z=0 \Leftrightarrow x=-y/m-z\cdot m^2.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\left\{\begin{pmatrix} -y/m-z/m^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}\middle| (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

$M-2I=\begin{pmatrix} -2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & -2 & 1/m \\ m^2 & m & -2 \end{pmatrix}$. On résout le système : $(M-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -2x+y/m+z/m^2 & =0 \\ mx-2y+z/m & =0 \\ m^2x+my-2z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -2x+y/m+z/m^2 & =0 \\ -3y+3z/m & =0 L_2 \leftarrow 2L_2+mL_1 \\ 3my-3z & =0 L_3 \leftarrow 2L_3+m^2L_1 \end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes étant redondantes, on supprime par exemple la dernière, et on obtient le système équivalent : $\left\{\begin{array}{ll} x & =y/2m+z/2m^2=z/m^2 \\ y & =z/m \end{array}\right.$. On en déduit que $M-2I$ est bien non inversible car le système homogène associé admet une infinité de solutions au système.
L'ensemble des solutions est

$$\left\{\begin{pmatrix} z/m^2 \\ z/m \\ z \end{pmatrix}\middle| z\in\mathbb{R}\right\}$$

2. On pose :

$$P=\frac{1}{3}(M+I) \text{ et } Q=-\frac{1}{3}(M-2I).$$

(a) On a $PQ=-\frac{1}{0}(M^2-M-2I)=(0)=QP$.

(b) On a $P^2=P$ donc par récurrence immédiate, $P^n=P$ pour tout $n\geqslant 1$ (et $P^0=I$). De même,$Q^2=Q$, donc par récurrence immédiate, $Q^n=Q$ pour tout $n\geqslant 1$ (et $Q^0=I$).

En allant un peu vite, vous vous êtes tirés une balle dans le pied car la question avec Newton nécessitait d'avoir remarqué que la formule était différente pour $n=0$ (wait a sec... je vous avais pas dit que c'était ultra-classique une formule qui ne marche pas en 0 et qui implique qu'il faut faire attention en appliquant Newton... ?)

(c) On a $2P-Q=M$.
En fonction de P et Q ne veut pas dire " en fonction de P, Q et I ".

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme P et Q commutent, on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k P^k (-1)^{n-k} Q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} P^k Q^{n-k} \\ &= 2^n P^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} P^k Q^{n-k}}_{=0 \text{ car } PQ=(0)} + (-1)^n Q^n \\ &= 2^n P + (-1)^n Q \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $M^0 = I$.

(e) On remarque que $P + Q = I$ et $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) = \frac{1}{2}(2P - Q - I) = \frac{1}{2}(P - 2Q) = \frac{1}{2}P - Q$. Avec un raisonnement similaire au précédent, on obtient :

$$\left(M^{-1}\right)^n = \frac{1}{2^n} P + (-1)^n Q,$$

et la formule précédente reste bien valable si n appartient à $\mathbb{Z}$.

(f) On remplace P et Q dans l'expression obtenue à la question précédente :

$$M^n = \frac{2^n}{3}(M + I) - \frac{(-1)^n}{3}(M - 2I) = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I + \frac{2^n - (-1)^n}{3} M.$$

Ainsi, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{2(-1)^n + 2^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = a_n I + b_n M.$$

Correction 3 1. u vérifie $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$.

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. L'équation $\lambda = \frac{1}{2}\lambda + 1$ a pour solution $\lambda = 2$.
On pose donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. La suite v ainsi définie est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = (u_0 - 2) \cdot \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^n}.$$

D'où :

$$u_n = v_n + 2 = \boxed{2 - \frac{1}{2^n}}.$$

On a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Certains ont pris comme premier terme u_0 et non pas v_0. Beaucoup ont oublié de me donner la limite.

2. Récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{H}(n)$: " $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{2^{n-k}}$ ".

- Initialisation. $\mathscr{H}(0)$ signifie que $u_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{t_k}{2^{0-k}} = \frac{t_0}{1}$, ce qui est vrai.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{H}(n)$. On écrit :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2} u_n + t_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{2^{n-k}} + t_{n+1} \qquad \text{(d'après } \mathscr{H}(n)\text{)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{2^{n+1-k}} + \underbrace{t_{n+1}}_{\text{terme en } k=n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t_k}{2^{n+1-k}} \end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathscr{H}(n+1)$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}(n)$ est vraie.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On fait le changement d'indice $i = n-k$ (ou $k = n-i$) :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Alternative : on utilise les questions 1 et 2 : on a en fait déterminé (u_n) lorsque t est constante égale à 1, ce qui correspond à la somme demandée sans plus de calcul.

Je ne veux pas voir de récurrence pour cette question!!!

(b) Supposons que t est bornée, mettons par $M \geqslant 0$. Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|t_n| \leqslant M$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |u_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{2^{n-k}} \right| \qquad \text{(question 2)} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|t_k|}{2^{n-k}} \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{M}{2^{n-k}} = M\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \qquad \text{(question précédente)} \\ &\leqslant 2M \end{aligned}$$

u est donc bornée par $2M$.

Certains m'ont écrit : $\forall n \in N, \alpha \leqslant t_n \leqslant \beta$ donc, après sommation, $\alpha\left(2-\frac{1}{2^n}\right) \leqslant u_n \leqslant \beta\left(2-\frac{1}{2^n}\right)$, et conclut que (u_n) est majorée " car les deux bornes convergent (et alors?) ou bien, passent à la limite dans les bornes (mais pas au milieu, c'est bien connu qu'on peut passer à la limite seulement là où ça nous arrange). Pour rappel, la suite est bornée si son terme général est borné par des CONSTANTES. La façon correcte de conclure était d'écrire $\beta\left(2-\frac{1}{2^n}\right) \leqslant \beta$ et $\alpha\left(2-\frac{1}{2^n}\right) \geqslant \alpha$ car $\frac{1}{2^n} \leqslant 1$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec la question 2 et comme les t_k sont positifs, on a : /2

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{2^{n-k}} \geqslant \underbrace{\frac{t_n}{2^{n-n}}}_{\text{terme en } k=n} = t_n.$$

D'autre part, comme t est croissante, on a $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $t_k \leqslant t_n$. Donc :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{2^{n-k}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{t_n}{2^{n-k}} = t_n\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant 2t_n.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n \;=\; \frac{1}{2}\, u_n + t_{n+1} - u_n \;=\; t_{n+1} - \frac{1}{2}\, u_n$$

Or, $u_n \leqslant 2t_n$. Donc $-\frac{1}{2}\, u_n \geqslant -t_n$. Donc :

$$u_{n+1} - u_n \;\geqslant\; t_{n+1} - t_n \;\geqslant\; 0 \qquad \text{car } t \text{ est croissante.}$$

u est donc croissante.

Certains m'ont soustrait les deux inégalités ce qui est TRES faux. On multiplie par -1 puis on additionne!

(c) Supposons que t est majorée, mettons par M. Comme elle est de plus croissante, elle converge. On note ℓ_t sa limite.
En ce qui concerne u, on a $u_n \leqslant 2t_n \leqslant 2M$, donc u est aussi majorée. D'après la question précédente, u est aussi croissante, donc u converge. On note ℓ_u sa limite.

Certains m'ont dit que u convergeait car encadrée entre deux suites convergentes, c'est très faux!
On passe alors à la limite $n \to +\infty$ dans l'égalité : $u_{n+1} = \frac{1}{2}\, u_n + t_{n+1}$, pour obtenir :

$$\ell_u = \frac{1}{2}\,\ell_u + \ell_t \qquad \text{ce qui implique : } \boxed{\ell_u = 2\ell_t}.$$

J'ai compté une partie des points à ceux qui m'ont simplement dit que $\ell_v \leqslant \ell_u \leqslant 2\ell_v$.

(d) Si (t_n) n'est pas majorée, alors $t_n \to \infty$ d'après la théorème de convergence monotone, puisque (t_n) est croissante. Comme ln est une fonction croissante, on a $\ln(t_n) \leqslant \ln(u_n) \leqslant \ln(2t_n) = \ln(2) + \ln(t_n)$. Comme (t_n) tend vers l'infini,$(\ln(t_n))$ aussi et il existe un rang N à partir duquel $t_n \geqslant 1$. On a donc

$$\forall n \geqslant N, 1 \leqslant \frac{\ln(u_n)}{\ln(t_n)} \leqslant 1 + \frac{\ln(2)}{ln(t_n)}.$$

Par encadrement, on obtient donc $\boxed{\ln(u_n) \sim \ln(t_n).}$

,

5. (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et v la suite de terme général $v_k = (ak+b)2^k$. Alors si $k \in \mathbb{N}$,

$$v_{k+1} - v_k = (ak+a+b)2^{k+1} - (ak+b)2^k = (ak+2a+b)2^k.$$

La suite vérifie la relation de récurrence proposée pour tout $k \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ 2a+b = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire si et seulement si $(a,b) = (1,-2)$. On choisit ces constantes. On obtient alors S_n en télescopant :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_0 = (n+1-2)2^{n+1} + 2 = \boxed{(n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2.}$$

Le nombre d'erreurs de calculs sur la simplification de "$ak + a - b - (ak + b)$ " est effarant.

(b) Vérifions que $2^{n+2} = o((n+1)2^{n+1})$: $\frac{2^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{2}{n+1} \to 0$.
Comme 2 est également négligeable devant cette quantité qui tend vers $+\infty$, on a donc

$$S_n \sim (n+1)2^{n+1} \sim \boxed{n2^{n+1}.}$$

6. Si $t_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_n = S_n$ d'après la question 2. Alors par produit d'équivalents,

$$u_n \sim \frac{n2^{n+1}}{2^n} \sim \boxed{2n.}$$

7. (a) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite négligeable devant $(n)_{n\in\mathbb{N}}$: $w_n = o(n)$. Cela veut dire qu'il existe une suite ε_n qui tend vers 0 telle que $w_n = \varepsilon_n n$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\varepsilon_n \to 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|\varepsilon_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. On scinde la somme à ce rang, et on applique l'inégalité triangulaire à deux reprises : si $n \geqslant N$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum_{k=0}^{n} 2^k w_k}{S_n}\right| &\leqslant \frac{1}{S_n}\left|\sum_{k=0}^{N-1} 2^k w_k\right| + \frac{1}{S_n}\left|\sum_{k=N}^{n} 2^k w_k\right| \\ &\leqslant \frac{C}{S_n} + \frac{1}{S_n}\sum_{k=N}^{n} k2^k \underbrace{|\varepsilon_k|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}} \\ &\leqslant \frac{C}{S_n} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{S_n}\sum_{k=N}^{n} k2^k,\end{aligned}$$

en notant $C = \sum_{k=0}^{N-1} 2^k w_k$ et en utilisant dans la somme de droite $w_k = k\varepsilon_k$, avec $|\varepsilon_k| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$ puisque $k \geqslant N$.
De plus $0 \leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=N}^{n} k2^k \leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} k2^k = 1$: on obtient l'inégalité en rajoutant des termes tous positifs dans la somme.
Comme $S_n \to \infty$, il existe un rang $\tilde{N}$ (qu'on peut choisir supérieur à N) tel que pour tout $n \geqslant \tilde{N}$, $\dfrac{C}{S_n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pour $n \geqslant \tilde{N}$, on a alors en reprenant la majoration précédente.

$$\left|\frac{\sum_{k=0}^{n} 2^k w_k}{S_n}\right| \leqslant \frac{C}{S_n} + \frac{1}{S_n}\sum_{k=N}^{n} k2^k|\varepsilon_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\frac{1}{S_n}\sum_{k=N}^{n} k2^k}_{\leqslant 1} \leqslant \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que $\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^k w_k = o(S_n).}$

(b) Comme $t_n \sim n$, en notant $w_n = t_n - n$, $w_n = o(n)$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k t_k = \sum_{k=0}^{n} k2^k + \sum_{k=0}^{n} w_k 2^k = S_n + \sum_{k=0}^{n} w_k 2^k \sim S_n$$

d'après la question précédente, puisque $\sum_{k=0}^{n} 2^k w_k = o(S_n)$. On a donc par produit d'équivalents, puis comme dans la question 6. :

$$u_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 2^k t_k \sim \frac{1}{2^n} S_n \boxed{\sim 2n.}$$

Correction 4 1. (a) i. On note $N = (\alpha_j m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$. La j-ème colonne de N est égale à la j-ème colonne de M multipliée par le réel α_j. Le déterminant étant linéaire par rapport à chaque colonne, on obtient

$$\det(N) = \left(\prod_{j=1}^{n} \alpha_j\right)\det(M).$$

Pensez à justifier votre résultat !

ii. On pose $R = (\alpha_i m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$. On remarque que $R^\top = (\alpha_j m_{ji})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ donc, d'après la question précédente, $\det(R^\top) = \left(\prod_{j=1}^{n} \alpha_j\right)\det(M^\top)$. Or $\det(R^\top) = \det(R)$ et $\det(M^\top) = \det(M)$, on en déduit donc que $\det(R) = \det(N)$.

(b) On a

$$a_{1,1}=\binom{p}{p},\ a_{1,n-p+1}=\binom{n}{p},\ a_{n-p+1,1}=\binom{n}{n},\ a_{1,n-p+1}=\binom{2n-p}{n}$$

(c) On a

$$d_n=\det(1)=1$$

$$d_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & n\\ 1 & n+1\end{vmatrix}=1$$

$$\begin{aligned}d_{n-2}&=\begin{vmatrix}1 & n-1 & \frac{n(n-1)}{2}\\ 1 & n & \frac{n(n+1)}{2}\\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & n-1 & \dfrac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 1 & n+1\end{vmatrix} L_3\leftarrow L_3-L_2, L_2\leftarrow L_2-L_1\\ &=\begin{vmatrix}1 & n\\ 1 & n+1\end{vmatrix}\ \text{dvpt p}/C_1\\ &=1.\end{aligned}$$

(d) i. On sait que $\binom{\beta}{\alpha}+\binom{\beta}{\alpha+1}=\binom{\beta+1}{\alpha+1}$ que l'on va utiliser sous la forme $\binom{\beta+1}{\alpha+1}-\binom{\beta}{\alpha}=\binom{\beta}{\alpha+1}$ En notant $A'_p=(a'_{i,j})$ la nouvelle matrice, la formule précédente donne (on doit distinguer le cas de la première colonne)

$$\forall i\geqslant 2,\ a'_{i,1}=0\ \text{ et }\ a'_{i,j}=\binom{p+i+j-3}{p+i-1}$$

ii. Les opérations effectuées laissant le déterminant invariant, on a $\det(A_p)=\det(A'_p)$. En effectuant un développement par rapport à la première colonne, on obtient

$$d_p=\det(A'_p)=\det\left(\left(\binom{p+i+j-3}{p+i-1}\right)\right)_{2\leqslant i,j\leqslant n-p+1}$$

En opérant un changement d'indice ($i'=i-1$ et $j'=j-1$) ceci s'écrit

$$d_p=\det\left(\left(\binom{p+1+i'+j'-2}{p+1+i'-1}\right)\right)_{1\leqslant i',j'\leqslant n-(p+1)+1}=d_{p+1}$$

On en déduit immédiatement que $\forall p\in[|0,n|],\ d_p=d_n=1$

2. (a) On a

$$D_0=\begin{vmatrix}1\end{vmatrix}=1,\ D_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\ D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 24\end{vmatrix}=4, \Delta_0=\begin{vmatrix}1\end{vmatrix}=1,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}=1$$

(b) Comme $\dbinom{i+j}{i}=\dfrac{(i+j)!}{i!j!}$, on peut factoriser chaque ligne de Δ_n par $\frac{1}{i!}$ puis chaque colonne par $\frac{1}{j!}$. Le déterminant étant multilinéaire, on a alors

$$\Delta_n=\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)^2 D_n$$

(c) On a

$$\Delta_n=\left(\binom{i+j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}=\left(\binom{i'+j'-2}{i'-1}\right)_{1\leqslant i',j'\leqslant n+1}=d_0=1$$

et donc

$$D_n=\prod_{k=0}^{n}(k!)^2$$