

Devoir surveillé 6.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Première étude de h .

- (a) Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, puis montrer qu'elle est continue en 0.
- (b) Soit $x > 0$. Calculer $h'(x)$.
- (c) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On précisera notamment la valeur de $h'(0)$.
- (d) Réaliser une étude complète de h (variations, limites, allure du graphe).

2. Au voisinage de 1.

- (a) Déterminer le DL à l'ordre 2 en 1 de h .
- (b) En déduire $h(1)$, $h'(1)$, $h''(1)$, ainsi que l'équation de la droite tangente au graphe de h en 1.
- (c) Déterminer la position relative du graphe de h et de sa tangente en 1 au voisinage de 1.

3. Régularité en 0.

- (a) Montrer, par récurrence sur n , que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que

$$\forall x > 0, h^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$$

- (b) A l'aide de la question précédente et du changement de variable $t = \frac{1}{x}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

- (c) En déduire que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Conseil : montrer d'abord au brouillon qu'elle est $\mathcal{C}^2$, puis qu'elle est $\mathcal{C}^3$, etc.

Exercice 2. Soient a et b deux réels fixés tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a; b], \mathbb{R})$, trois fois dérivable sur $]a; b[$. On souhaite prouver que :

$$\exists c \in]a; b[\left[, \quad f(b) = f(a) + (b-a)f' \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(c) \right.$$

Pour cela, on considère la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \left[0; \frac{b-a}{2} \right], \quad \varphi(x) = f \left(\frac{a+b}{2} + x \right) - f \left(\frac{a+b}{2} - x \right) - 2xf' \left(\frac{a+b}{2} \right) - Kx^3$$

où K est choisi de façon à ce que $\varphi \left(\frac{b-a}{2} \right) = 0$.

1. Justifier que φ est bien définie sur $\left[0; \frac{b-a}{2} \right]$.
2. Déterminer la constante K .
3. Prouver qu'il existe $c_1 \in \left] 0, \frac{b-a}{2} \right[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$.
4. Prouver qu'il existe $c_2 \in]0, c_1[$ tel que $\varphi^{(2)}(c_2) = 0$.
5. Prouver qu'il existe $c \in \left] \frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2 \right[$ tel que $f^{(2)} \left(\frac{a+b}{2} + c_2 \right) - f^{(2)} \left(\frac{a+b}{2} - c_2 \right) = 2c_2 f^{(3)}(c)$.
6. En déduire le résultat.

Exercice 3. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n(x) = x \cos^n(x).$$

1. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le signe de $f'_n(x)$ est le même que celui de $g_n(x) = \cos(x) - nx \sin(x)$.

(b) En déduire qu'il existe un unique nombre $t_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f_n(t_n)$ soit maximal.

2. Montrer que l'application $x \mapsto x \tan(x)$ induit une bijection φ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3. Montrer que $\varphi(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En déduire que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4. Montrer que $t_n^2 \sim \frac{1}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

5. Trouver un équivalent simple de $f_n(t_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

6. Montrer qu'on a $t_n^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Conseil : on pourra utiliser le DL4 de φ en 0.

7. En déduire un développement asymptotique à deux termes de t_n .

Exercice 4. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(x)} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g . On le notera D .
2. (a) Démontrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer sa fonction dérivée.
(b) Tracer le tableau de variations de la fonction g . On déterminera les limites.
3. Déterminer les éventuels points fixes de la fonction g .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\ln(u_n)} \end{cases}$$

4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, e \leq u_n$.
5. Déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
6. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite.
7. Démontrer que $\forall x \in [e, +\infty[, 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{4}$.
8. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|$.
(b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.
9. Déterminer un entier naturel n_1 tel que u_{n_1} est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Soit (E) l'équation suivante :

$$\ln(x)y' + \frac{1}{x}y = 1$$

On cherche à déterminer les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire les fonctions f définies et dérivables sur $]0, +\infty[$ telles que $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x)f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 1$.

10. On suppose que l'équation (E) admet une solution sur $]0, +\infty[$ que l'on note f .
 - (a) Démontrer que $\ln \times f$ est de dérivée constante.
 - (b) En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, f(x) = \frac{x+c}{\ln(x)}$.
 - (c) Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle continue?
11. Soit maintenant $c \in \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto \frac{c+x}{\ln(x)}$ soit prolongeable par continuité en 1. On note f ce prolongement continu.
 - (a) Déterminer un DL1 en 1 de f .
 - (b) En déduire que f est dérivable et préciser $f(1)$ et $f'(1)$.
12. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .

Correction du DS n 6

Correction 1 1. (a) h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 0[$ (fonction nulle) ainsi que sur $]0, +\infty[$ (par composition de fonctions $\mathcal{C}^\infty$). Étudions son comportement en 0.

Pour la continuité en 0 : quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ donc $e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, et $h(0)$ vaut bien 0. Donc h est continue à droite en 0. Elle l'est, bien sûr, aussi à gauche car $\lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$.

Conclusion : h est continue en 0.

Ne pas oublier de calculer la limite en 0^- .

(b) Soit $x > 0$. On calcule :

$$h'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

(c) Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 e^{-t} = 0$ par croissances comparées.

Donc : $h'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

D'autre part, si $x < 0$, $h'(x) = 0$ donc $h'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, h est dérivable en 0, $h'(0) = 0$, et h' est bien continue en 0.

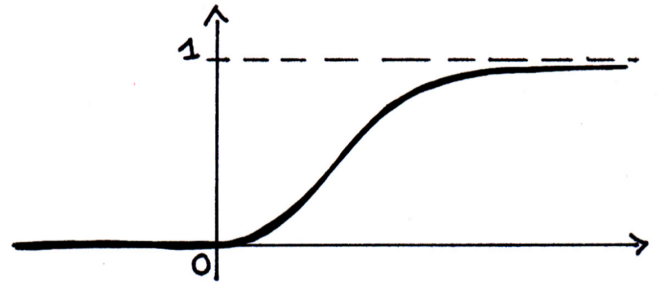
Conclusion : h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Là encore, il ne faut pas oublier de parler de la limite à gauche. Par ailleurs, si vous appliquez le thm de la limite de la dérivée, il est inutile de calculer, avant, le taux d'accroissement (et c'est tout l'intérêt de ce thm!).

(d)

Étude de h : $\forall x > 0$, $h'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} > 0$, donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (et constante sur $\mathbb{R}_-$).

D'autre part, $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1$.



N'oubliez pas de parler des variations sur $\mathbb{R}^-$ et pour l'allure du graphe, évitez de faire une ligne brisée en 0 : la fonction est dérivable en 0, le graphe admet donc une tangente en ce point!

2. (a) Faisons le changement de variable $x = 1 + t$, c'est-à-dire $t = x - 1$. Lorsque $x \rightarrow 1$, $t \rightarrow 0$. On calcule alors :

$$h(1+t) = e^{-\frac{1}{1+t}}$$

Or, $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$. Donc :

$$h(1+t) = e^{-1+t-t^2+o(t^2)} = e^{-1} \times e^{t-t^2+o(t^2)}$$

On applique alors $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$ à $X = t - t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$, qui tend bien vers 0 :

$$\begin{aligned} e^{t-t^2+o(t^2)} &= 1 + (t - t^2 + o(t^2)) + \frac{1}{2}(t - t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2))^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \\ &= 1 + (t - t^2 + o(t^2)) + \frac{1}{2}(t^2 + o(t^2)) + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \\ &= 1 + t - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \end{aligned}$$

D'où : $h(1+t) = e^{-1} + e^{-1}t - \frac{e^{-1}}{2}t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$ puis

$$h(x) = e^{-1} + e^{-1}(x-1) - \frac{e^{-1}(x-1)^2}{2} + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$$

Certains ont posé $y = -\frac{1}{x} + 1$ pour avoir un exposant qui tend vers 0. Le problème est de se retrouver avec des puissances de $\frac{1}{x}$, ce qui ne donne pas un DL! Pour rappel, un DL en a c'est un polynôme en $(x-a)$ + un $o((x-a)^k)$ avec un certain entier k .

(b) Par ailleurs, on sait par la formule de Taylor-Young (h est bien $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de 1) que :

$$h(x) = h(1) + h'(1)(x-1) + \frac{h''(1)}{2}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$$

Donc par unicité du DL :

$$h(1) = e^{-1}$$

$$h'(1) = e^{-1}$$

$$h''(1) = -e^{-1}$$

D'autre part, l'équation de la tangente au graphe de h en 1 est :

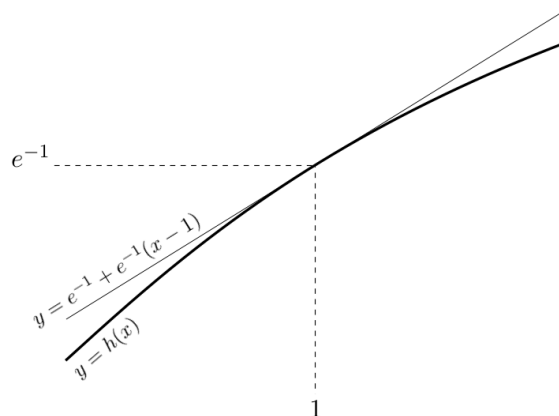
$$y = e^{-1} + e^{-1}(x-1)$$

Là, quand vous trouvez une équation de droite avec des $\frac{1}{x}$, ça aurait dû vous mettre la puce à l'oreille.

(c) Il s'agit d'étudier le signe de $h(x) = e^{-1} + e^{-1}(x-1) - \frac{e^{-1}(x-1)^2}{2}$ au voisinage de $x = 1$. Or, d'après le $DL_2(1)$ obtenu, on a :

$$h(x) - (e^{-1} + e^{-1}(x-1)) = -\frac{e^{-1}(x-1)^2}{2} + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{e^{-1}(x-1)^2}{2}.$$

Les quantités $h(x) - (e^{-1} + e^{-1}(x-1))$ et $-\frac{e^{-1}(x-1)^2}{2}$ ont donc même signe au voisinage de $x = 1$. Le graphe de h est donc au dessous de sa tangente au voisinage de 1.



Je suis très contente de lire que vous savez qu'il faut regarder le signe du terme qui vient après l'équation de la tangente mais vous devriez être conscient désormais qu'on attend de vous que vous expliquiez ce que vous avez compris.

3. On raisonne par récurrence sur n .

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{H}(n) : \left[\begin{array}{l} \text{Il existe une fonction polynomiale } P_n \text{ telle que :} \\ \forall x > 0, h^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} \end{array} \right]$$

— initialisation : $\mathcal{H}(0)$ est vraie en posant $P_0 : x \mapsto 1$.

— hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. $\forall x > 0$:

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= h^{(n)'}(x) = \frac{x^{2n} P_n'(x) - 2n x^{2n-1} P_n(x)}{x^{4n}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \left(\frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n+2}} (x^2 P_n'(x) - 2n x P_n(x) + P_n(x)) \\ &= \frac{(x^2 P_n'(x) + (1 - 2n x) P_n(x))}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$\mathcal{H}(n+1)$ est vraie, en posant $P_{n+1} : x \mapsto x^2 P_n'(x) + (1 - 2n x) P_n(x)$, qui est bien une fonction polynomiale.

— conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

Beaucoup d'erreur dans les calculs de puissances et pour info : $2(n+1) \neq 2n+1$. Certains sont partis du principe que P_n' valait P_{n-1} ce qui est très faux. Attention, on ne connaît pas le degré de P_n .

(b) En posant $t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, on a $h^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right) = P_n\left(\frac{1}{t}\right) \times t^{2n} e^{-t}$.

$$\text{Or : } \left\{ \begin{array}{l} P_n\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} P_n(0) \quad (\text{continuité de } P_n) \\ t^{2n} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{croissance comparée}) \end{array} \right.$$

$$\text{Donc : } \boxed{h^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0} \quad (\text{résultat valable } \forall n \in \mathbb{N})$$

L'énoncé vous disait de poser $t = \frac{1}{x}$ et vous donnait la limite donc écrire " $h^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right) \rightarrow 0$ par croissances comparées" pourrait juste être un énorme coup de bluff de votre part. Pour qu'il n'y ait pas de doute : détaillez!

(c) On raisonne, à nouveau, par récurrence sur n . $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n) : [h \text{ est } \mathcal{C}^n \text{ sur } \mathbb{R}]$.

— initialisation : $\mathcal{H}(0)$ est vraie car nous avons montré à la question 1 que h était continue.

— hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On sait que :

- $h^{(n)}$ est continue en 0 (par $\mathcal{H}(n)$);
- $h^{(n)'}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ (par le résultat encadré ci-dessus, car $(h^{(n)})' = h^{(n+1)}$.)
- $h^{(n)'}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$ (car h est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-$, donc ses dérivées successives aussi).

Donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, $h^{(n)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ou autrement dit, h est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Cela démontre $\mathcal{H}(n+1)$.

— conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

Finalement, h est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Beaucoup d'arnaques sur cette question. "d'après le thm de la dérivée, on a donc". À quelle fonction appliquez-vous le thm de la dérivée? et si c'est $h^{(n-1)}$, êtes-vous sûr(e) que c'est une fonction continue? (d'où la nécessité de raisonner par récurrence).

Correction 2 1. Soit $x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$, alors $\frac{a+b}{2} - x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \subset [a, b]$ et $\frac{a+b}{2} + x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \subset [a, b]$. Par ailleurs, $\frac{a+b}{2} \in [a, b]$ donc la fonction φ est bien définie.

L'intervalle $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ n'est pas inclus dans $[a, b]$ et montrer que φ est bien définie en 0 et $\frac{b-a}{2}$ ne suffit pas à montrer que φ est définie sur $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$

2. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0 &\Leftrightarrow f(b) - f(a) - 2\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - K\frac{(b-a)^3}{8} = 0 \\ &\Leftrightarrow K = \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^3/8}\end{aligned}$$

On doit donc poser

$$K = \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^3/8}.$$

Définir K à l'aide de c alors qu'on cherche justement à prouver l'existence de c , n'a aucun sens !

3. On a $\varphi(0) = 0 = \varphi\left(\frac{b-a}{2}\right)$. De plus, φ est continue sur $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0, \frac{b-a}{2}\right[$. On en déduit, par le thm de Rolle,

$$\exists c_1 \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[\text{ tel que } \varphi'(c_1) = 0.$$

Il est impératif de citer les hypothèses de Rolle quand vous l'appliquez.

4. La fonction φ est dérivable sur $\left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$, on a

$$\varphi'(x) = f'\left(\frac{a+b}{2} + x\right) + f'\left(\frac{a+b}{2} - x\right) - 2f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - 3Kx^2.$$

On remarque que $\varphi'(0) = 0$. Par ailleurs, φ' est continue sur $[0, c_1]$ car f est C^1 sur $[a, b]$, elle est également dérivable sur $]0, c_1[$ car f est deux fois dérivable sur $[a, b]$. On peut donc appliquer le thm de Rolle entre 0 et c_1 :

$$\text{il existe } c_2 \in]0; c_1[\text{ tel que } \varphi^{(2)}(c_2) = 0.$$

5. On a $c_2 \in]0, c_1[\subset \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ donc $\frac{a+b}{2} + c_2 \in]a, b[$ et de même pour $\frac{a+b}{2} - c_2$. La fonction f étant trois fois dérivable sur $]a, b[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à $f^{(2)}$ entre les points $\frac{a+b}{2} + c_2$ et $\frac{a+b}{2} - c_2$:

$$\exists c \in \left]\frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2\right[, \frac{f\left(\frac{a+b}{2} + c_2\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - c_2\right)}{2c_2} = f^{(3)}(c).$$

En multipliant l'égalité par $2c_2$, on obtient l'égalité souhaitée à savoir

$$\boxed{\exists c \in \left] \frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2 \right[\text{ tel que } f^{(2)}\left(\frac{a+b}{2} + c_2\right) - f^{(2)}\left(\frac{a+b}{2} - c_2\right) = 2c_2 f^{(3)}(c).}$$

6. Reprenons ce que l'on sait :

$$\begin{cases} \varphi^{(2)}(c_2) = 0 \\ 2c_2 f^{(3)}(c) = f^{(2)}\left(\frac{a+b}{2} + c_2\right) - f^{(2)}\left(\frac{a+b}{2} - c_2\right) \end{cases} \quad \text{Pour tout } x \in \left] 0, \frac{b-a}{2} \right[, \text{ on a}$$

$$\varphi^{(2)}(x) = f^{(2)}\left(\frac{a+b}{2} + x\right) - f^{(2)}\left(\frac{a+b}{2} - x\right) - 6Kx,$$

on en déduit donc que

$$6Kc_2 = f^{(2)}\left(\frac{a+b}{2} + c_2\right) - f^{(2)}\left(\frac{a+b}{2} - c_2\right),$$

ce qui implique

$$6Kc_2 = 2c_2 f^{(3)}(c).$$

En divisant par $c_2 \neq 0$, on obtient

$$3K = f^{(3)}(c).$$

Reprenons maintenant l'expression de K trouvée à la question 2 :

$$K = \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^3/8},$$

on en déduit que

$$f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{8} K = \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(c),$$

d'où on obtient

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(c).}$$

Correction 3 1. (a) f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par produit et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f'_n(x) = \cos^n(x) + x \cdot n \cos^{n-1}(x) \cdot (-\sin(x)) = \cos^{n-1}(x) \underbrace{(\cos(x) - nx \sin(x))}_{g_n(x)}$$

Or, $\cos(x) > 0$ si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos^{n-1}(x) > 0$. Le signe de $f'_n(x)$ est donc le même que celui de $g_n(x)$.

Beaucoup d'erreurs dans le calcul de cette dérivée.

(b) g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$g'_n(x) = -\sin(x) - nx \cos(x) - n \sin(x)$$

Cette quantité est strictement négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (sauf en 0), donc g_n est strictement décroissante.

On calcule $g_n(0) = 1 > 0$, et $g_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{n\pi}{2} < 0$.

g_n est donc continue et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\text{Im}(g_n) = \left[-\frac{n\pi}{2}, 1\right]$. Or, 0 appartient à cet intervalle image. Par injectivité de g_n , 0 admet un unique antécédent dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, antécédent que l'on note t_n .

On obtient alors les variations de f_n :

x	0	t_n	$\frac{\pi}{2}$
g_n	1	0	$-\frac{n\pi}{2}$
$g_n(x)$		+	-
f_n	0		0

On constate que f_n admet un maximum en t_n , là où la dérivée de f_n s'annule.

J'ai vu beaucoup de " f'_n s'annule en un unique point donc f_n admet un unique maximum " ce qui est très faux. Pour rappel, le thm des extrema locaux ne donne qu'une implication : extremum en un point intérieur implique annulation de la dérivée en ce point. Donc me montrer que f'_n s'annule en un unique point ne montre rien.

2. On pose $h : x \mapsto x \tan(x)$. La fonction h est dérivable et

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], h'(x) = \tan(x) + x(1 + \tan^2(x)) \geq 0.$$

On en déduit que la fonction h est strictement croissante donc injective. Par ailleurs, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h(x) = +\infty$ donc, par continuité de h , $\text{Im}(h) = h\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \mathbb{R}^+$. On en déduit que la fonction

$\varphi = h|_{\mathbb{R}^+}$ est bijective et h induit bien une bijection.

Plutôt que de faire une énième remarque sur la rédaction d'une telle question, remarque que vous ne lirez visiblement pas, j'hésite entre vous donnez ma recette de cookies ou bien celle des rochers d'Hagrid.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(t_n) - n t_n \sin(t_n) = 0$ donc $t_n \tan(t_n) = \frac{1}{n}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(t_n) = h(t_n) = \frac{1}{n}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n) = 0$.

La fonction φ étant continue, φ^{-1} aussi. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{-1} \circ \varphi(t_n) = \varphi^{-1}(0) = 0$. *La deuxième partie a été compliquée à justifier. Me dire $\varphi(0) = 0$ ne suffit pas. Prenez $x_n = \pi + \frac{1}{n}$. On a $\sin(x_n) \rightarrow 0$ et $\sin(0) = 0$ mais $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 (et c'est d'ailleurs pour cela que je vous ai fait remarquer qu'on avait une bijection).*

4. On sait que $\cos(t_n) = n t_n \sin(t_n)$.

Or, comme $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\cos(t_n) \sim 1$ et $\sin(t_n) \sim t_n$. D'où :

$$1 \sim n t_n^2 \quad \text{et donc} \quad \boxed{t_n^2 \sim \frac{1}{n}}.$$

5. On a $f_n(t_n) = t_n \cos^n(t_n)$. Or :

$$\cos^n(t_n) = \exp(n \ln(\cos(t_n)))$$

Mais $\ln(u) \underset{u \rightarrow 1}{\sim} 1 - u$, donc comme $\cos(t_n) \rightarrow 1$:

$$n \ln(\cos(t_n)) \sim n(1 - \cos(t_n)) \sim -\frac{nt_n^2}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

puisque d'après la question précédente, $nt_n^2 \sim 1$. Donc par passage à la limite dans l'exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$, $\cos^n(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}}$.

Donc par produit : $f_n(t_n) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}$.

Attention, la formule $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ne s'applique que pour α constant!

6. On repart de $\cos(t_n) = nt_n \sin(t_n)$ qu'on réécrit $\frac{1}{n} = t_n \tan(t_n)$. Comme $t_n \rightarrow 0$, le DL de φ donne :

$$\frac{1}{n} = t_n^2 + \frac{1}{3}t_n^4 + o(t_n^4).$$

On a $t_n^2 \sim \frac{1}{n}$ donc $t_n^4 \sim \frac{1}{n^2}$. On a donc $t_n^4 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Enfin, comme $t_n^4 \sim \frac{1}{n^2}$, on a $o(t_n^4) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc

$$\frac{1}{n} = t_n^2 + \frac{1}{3} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On obtient donc le résultat voulu :

$$t_n^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On peut aussi écrire

$$\frac{1}{n} - t_n^2 \sim \frac{t_n^4}{3} \sim \frac{1}{3n^2},$$

puis

$$\frac{1}{n} - t_n^2 = \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

7. On passe à la racine le calcul précédent :

$$\begin{aligned} t_n &= \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}} \times \sqrt{1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (\text{car } \sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Correction 4 1. D'après l'énoncé, la fonction g est définie en 0. De plus, la fonction $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$ et s'annule exactement en 1. Par conséquent, le domaine de définition de la fonction g est $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2. (a) • $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ par croissances comparées donc g est continue en 0.
 • Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ donc par quotient la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, g'(x) = \frac{1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

- Pour tout $x \in D \setminus \{0\}$, $g'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0$. Par le théorème de la dérivée, g est dérivable en 0, $g'(0) = 0$ et g est C^1 en 0.

D'après les deux points précédents, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et sa fonction dérivée est

$$g' : \begin{cases} D & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \begin{cases} \mathbb{R} \\ \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

- D'après la question précédente, $g'(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 1[, \ln(x) < 0$ donc pour tout $x \in D$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$.
 • La fonction g est dérivable donc continue en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$.
 • On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0^-$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$.
 • On a $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$.
 • D'après le théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\forall x > 1, \frac{\ln(x)}{x} > 0$ donc par passage à l'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

On a donc :

x	0	1	e	$+\infty$
$g'(x)$		-	- 0 +	
g	0	$+\infty$	e	$+\infty$

3. • On remarque que $g(0) = 0$ donc 0 est un point fixe de la fonction g .
 • Pour tout $x \in D \setminus \{0\}$, on a :
 $g(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln(x)} = x \Leftrightarrow x \left(\frac{1}{\ln(x)} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(1 - \ln(x))}{\ln(x)} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$.

On en déduit que sur $D \setminus \{0\}$, l'unique point fixe de la fonction g est e .

D'après les deux points précédents, la fonction g admet deux points fixes qui sont 0 et e .

Certains m'ont écrit "d'après le tableau de variations, g admet deux points fixes" et j'ai mis un moment à comprendre ce que vous vouliez dire! Vous pouvez dire que vous avez remarqué que $g(0) = 0$ et $g(e) = e$ mais dire "d'après le tableau de variations" donne l'impression que vous utilisez un TVI pour trouver les points fixes.

4. D'après le tableau de variations, l'intervalle $]1, +\infty[$ est stable par g et $u_0 \in]1, +\infty[$ donc la suite est bien définie.

Par ailleurs, l'intervalle $[e, +\infty[$ est également stable par g et $u_0 \in [e, +\infty[$ donc, par récurrence sur n , $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [e, +\infty[$.

On peut également dire que $u_n \geq e \Rightarrow u_{n+1} \geq e$ par croissance de g sur $[e, +\infty[$, ce qui montre également le résultat par récurrence sur n .

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - \ln(u_n))}{\ln(u_n)}$. Or, d'après la question 4, $e \leq u_n$ donc $0 \leq u_n$ et $0 < 1 \leq \ln(u_n)$. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq u_n$. Cela démontre que

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On peut aussi dire que $u_1 = \frac{3}{\ln(3)} \leq 3$ car $\ln(3) \geq 1$. Par croissance de g , on montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est bien décroissante.

6. D'après les questions 4 et 5, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la limite monotone, cette suite converge. On note ℓ sa limite.

D'après la question 4, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e \leq u_n$ donc, d'après la propriété de passage à la limite dans les inégalités, on a $e \leq \ell$ donc $\ell \in D$.

De plus, la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers ℓ .

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ et $\ell \in D$. Or, d'après la question 2)a), la fonction g est continue sur D donc elle est continue en ℓ . Par conséquent, la suite $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $g(\ell)$.

Par unicité de la limite $\ell = g(\ell)$.

On peut conclure que ℓ est un point fixe de la fonction g et que $e \leq \ell$. D'après la question 3, on a $\ell = e$.

On a démontré que

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est égale à e .

Le raisonnement doit se faire en deux temps : la convergence avec le thm de convergence monotone puis la détermination de la limite. Je sais que vous avez pris l'habitude de la boîte noire " thm du point fixe" mais je vous demande d'éviter les boîtes noires et de montrer que vous savez pourquoi la suite ne peut converger que vers un point fixe de g .

7. D'après la question 2)a), la fonction g est dérivable sur $[e, +\infty[$ et sa fonction dérivée sur cet intervalle est définie par : $\forall x \in [e, +\infty[, g'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$.

- Pour tout $x \in [e, +\infty[, \ln(x) \geq 1$ donc $g'(x) \geq 0$.
- De plus, la fonction $\ln$ est dérivable sur $[e, +\infty[$ donc par différence, produit puis quotient, la fonction g' est dérivable sur $[e, +\infty[$ et sa fonction dérivée est définie par : $\forall x \in [e, +\infty[,$

$$(g')'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln(x))^2 - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)(\ln(x) - 1)}{(\ln(x))^4} = \frac{2 - \ln(x)}{x(\ln(x))^3}.$$

On a $g''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^2$ et $g'(e^2) = \frac{\ln(e^2) - 1}{(\ln(e^2))^2} = \frac{2\ln(e) - 1}{(2\ln(e))^2} = \frac{1}{4}$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	e	e^2	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-
g'			

Le tableau de variations montre que $\forall x \geq e, 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{4}$.

Certains l'ont montré en raisonnant par équivalence :

$$g'(x) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4 \ln(x) - 4 \leq \ln^2(x) \Leftrightarrow 0 \leq (\ln(x) - 2)^2,$$

ce qui est tout à fait correct.

8. (a) On sait que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[e, +\infty[$ et, d'après la question précédente, $\forall x \in [e, +\infty[, |g'(x)| = g'(x) \leq \frac{1}{4}$. On en déduit que g est $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne. Pour tout $x_1, x_2 \in [e, +\infty[, |g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{1}{4}|x_1 - x_2|$.
D'après la question 1), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [e, +\infty[$ et $e \in [e, +\infty[$ donc

$$|g(u_n) - g(e)| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$$

c'est-à-dire

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|.$$

On a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|.$$

On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Attention, l'inégalité des accroissements finis est valable pour $x_1 \neq x_2$ donc pour $u_n \neq e$. Visiblement, diviser par une quantité sans préciser qu'elle est non nulle (ou que ce n'est pas grave si elle est nulle car l'inégalité après avoir multiplié par le dénominateur est, elle, toujours vraie) ne vous empêche toujours pas de dormir.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q(n) : "|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}"$. On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ est vraie.

• Initialisation : Montrons que $Q(0)$ est vraie.

D'après l'énoncé, $u_0 = 3$ donc $0 \leq u_0 - e \leq 1$ donc $|u_0 - e| \leq 1$. Et $1 = \frac{1}{4^0}$.

Donc $Q(0)$ est vraie.

• Hérédité : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $Q(n)$ est vraie c'est-à-dire que $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$. En multipliant par $\frac{1}{4}$, on obtient $\frac{1}{4}|u_n - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$. D'après la question précédente, $|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$. Par transitivité, on en déduit que $|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$ c'est-à-dire que $Q(n+1)$ est vraie.

On a démontré que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ est vraie c'est-à-dire que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente, on a $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ donc si $\frac{1}{4^n} \leq 10^{-12}$ alors, par transitivité, on a $|u_n - e| \leq 10^{-12}$.

$$\text{On résout : } \frac{1}{4^n} \leq 10^{-12} \Leftrightarrow \exp(-n \ln(4)) \leq \exp(-12 \ln(10)) \Leftrightarrow -n \ln(4) \leq -12 \ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{-12 \ln(10)}{-\ln(4)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{6 \ln(10)}{\ln(2)}.$$

On pose

$$n_1 = \left\lfloor \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1.$$

Le nombre n_1 est bien un entier naturel et d'après ce qui précède on a $|u_{n_1} - e| \leq 10^{-12}$ donc u_{n_1} est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Je vous rappelle que $\frac{6\ln(10)}{\ln(2)}$ n'est PAS un entier!

10. (a) Par hypothèse, la fonction f est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ donc $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x)f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 1$. On remarque que $\forall x \in]0, +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$ et on reconnaît dans le membre de gauche la dérivée d'un produit. Cela est donc équivalent à :

$$\forall x \in]0, +\infty[, (\ln \cdot f)'(x) = 1.$$

On évite $(f \text{ fonction}(x))'$, on écrit plutôt $\text{fonction}'(x)$!

- (b) D'après la question précédente, $\forall x \in]0, +\infty[, (\ln \cdot f)'(x) = 1$. On intègre sur le domaine $]0, +\infty[$ qui est un intervalle : il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0, +\infty[, (\ln \cdot f)(x) = x + c$ c'est-à-dire $\ln(x) \cdot f(x) = x + c$.

De plus, $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \ln(x) \neq 0$ donc on peut diviser par $\ln(x)$ et pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[,$ on

obtient
$$f(x) = \frac{x + c}{\ln(x)}.$$

On va mettre ça sur la fatigue mais certains sont allés me chercher du théorème des accroissements finis pour montrer ça... Pourquoi???

- (c) La fonction f doit être continue en 0. On a $\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$. Pour $c \neq -1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + c}{\ln(x)} = \infty$. Pour $c = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln(x)} = 1$ et f est bien continue. L'unique valeur de c pour laquelle f est continue est $c = -1$.

Bon, là j'ai perdu l'immense majorité de la classe.

11. (a) On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x - 1}{\ln(x)}$, prolongée par continuité en 1 en posant $f(1) = 1$. Pour calculer un DL de f en 1, on pose $x = 1 + t$, on a alors

$$\frac{t}{\ln(1 + t)} = \frac{t}{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)} = \frac{1}{1 - \frac{t}{2} + o(t)} = 1 + \frac{t}{2} + o(t).$$

On en déduit que

$$f(x) = 1 + \frac{(x - 1)}{2} + o_{x \rightarrow 1}(x - 1).$$

ça tombait bien en prenant $c = -1$ ce que certains (qui avaient pourtant trouvé que seul $c = -1$ convenait) n'ont pas fait, c'est dommage!

- (b) La fonction f est continue en 1 et admet un DL1, elle est donc dérivable. Par unicité du DL, on a

$$f(1) = 1 \text{ et } f'(1) = \frac{1}{2}.$$

12. • D'après les questions 10), si l'équation (E) admet sur $]0, +\infty[$ une solution, alors cette solution est la fonction définie par

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{x - 1}{\ln(x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- D'après les questions 11, cette fonction est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} & \text{- si } x \neq 1, \ln(x)h'(x) + \frac{1}{x}h(x) = \ln(x) \frac{\ln(x) - 1 + \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} + \frac{1}{x} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1 - \frac{x-1}{x\ln(x)} + \frac{x-1}{x\ln(x)} = 1, \\ & \text{- et si } x = 1, \ln(x)h'(x) + \frac{1}{x}h(x) = \ln(1)h'(1) + \frac{1}{1}h(1) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = 1. \end{aligned}$$

La fonction h est donc une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

D'après les deux points précédents, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est $\{h\}$ c'est-à-dire que la fonction h est l'unique solution de (E) sur $]0, +\infty[$.