

TD 15 : Polynômes.

1 Autour des coefficients

Exercice 1.

Soit n un entier naturel non nul. Soit $A_n = (X + i)^n - (X - i)^n$. Quel est le terme dominant de A_n ?

Exercice 2.

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = P(-X)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2)$

Exercice 3.

Trouver les solutions polynômiales des équations différentielles suivantes :

1. $xy'' + 2xy' - 3y = x^3 + 2x^2 - 2$
2. $xy'' + 2xy' - 8y = 0$

Exercice 4.

Soient P et Q tel que $P^2 = (X - 1)Q^2$. Montrer que $P = Q = 0$.

2 Polynômes et dérivée

Exercice 5.

Soit $P_n = (X(X - 1))^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$.

1. Déterminer $L_n(1)$.
2. Déterminer le degré de L_n et son terme dominant.

Exercice 6.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et admettant pour racines distinctes $a_1, \dots, a_n$. Montrer que

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - a_k}.$$

Division euclidienne

Exercice 7.

Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 8.

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $M^2 - 9I_3 = (0)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 9$.
3. En déduire, pour tout entier n , M^n .

Exercice 9.

Montrer que $X(X - 2)$ divise $(X - 1)^4 + (X - 1)^2 - 2$.

Exercice 10.

Calculer le reste de la division euclidienne de $P_n = (X \sin \theta + \cos \theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 11.

Soient n, d des entiers naturels. On suppose que $n = qd + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < d$.

1. Montrer que $X^n - 1 = X^r(X^{qd} - 1) + (X^r - 1)$ puis donner le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^d - 1$.
2. En déduire que :

$$X^d - 1 \text{ divise } X^n - 1 \Leftrightarrow d \text{ divise } n$$

3 Racines multiples

Exercice 12.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer qu'il en est de même de P' . Montrer ensuite que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

4 Racines et factorisation

Exercice 13.

Décomposer $X^6 + X^3 + 1$ sur $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14.

Soit $P(X) = X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5$. Montrer que i est racine de P . En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ (en produit de polynômes irréductibles) de P .

Exercice 15.

Factoriser $(X^2 + 1)^2 + (X^2 - X - 1)^2$ sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16.

Factoriser $X^7 - 3$ sur $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

5 Nombre de racines

Exercice 17.

Soit P et Q deux polynômes tels que $P(n) = Q(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P = Q$.

Exercice 18.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 2$. Montrer que la fonction polynômiale associée admet au plus n points fixes.

6 Équation fonctionnelle

Exercice 19.

Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 20. ⚙️

Soit P un polynôme non-nul unitaire vérifiant :

$$P(X)P(X-1) = P(X^2)$$

1. Vérifiez que si z est racine de P alors z^2 est racine de P , puis que z^{2^k} est racine de P pour tout entier naturel k .
2. Montrez que les racines de P sont de module 0 ou 1.
3. Vérifiez que si z est racine de P alors $(z+1)^2$ est racine de P et trouvez toutes les racines possibles de P .
4. Montrez que les polynômes vérifiant l'équation fonctionnelle ci-dessus sont les puissances de $X^2 + X + 1$.

Exercice 21.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P un polynôme unitaire vérifiant : $(X+1)P' = nP$.

1. Trouvez le degré de P .
2. Trouvez une relation de récurrence entre les coefficients de P .
3. Calculez ces coefficients et vérifiez que P s'exprime comme le produit d'une constante et d'une puissance d'un polynôme de degré 1.
4. Retrouvez ce résultat avec la notion de multiplicité.

7 Fractions rationnelles

Exercice 22.

Déterminer la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{X^2 + 1}{X(X^2 - 1)}$.
2. $\frac{3X^2 + 3}{X^3 + 2X^2 - X - 2}$.
3. $\frac{X^2 + 1}{X^2 + 4}$.

Exercice 23.

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int^x \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t} dt$
2. $\int^x \frac{\sin^3 t}{1 + \cos t} dt$

8 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 24.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = ((X^2 + 3X - 5)^n)^{(n)}$. Quel est le terme dominant de P_n ?

Exercice 25.

Effectuer la division euclidienne de A par B lorsque :

1. $A(X) = X^7 - 2X + 1$ et $B(X) = X^2 - 1$
2. $A(X) = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $B(X) = X^2 + 2X + 3$

Exercice 26.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(X) = X^7 - 3X^5 - 2X^4 + 5$ par $X^2 - 3X + 2$ puis par $(X+1)^2$.

Exercice 27.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 28.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, montrer que $X^3 + X^2 + X + 1$ divise le polynôme $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$.

Exercice 29.

Montrer que $(X+1)^{2017} - X^{2017} - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 30.

Soit $n \geq 2$ et $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme P_n a-t-il une racine multiple dans $\mathbb{C}$?

Exercice 31.

Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par leur dérivée.

Exercice 32.

Soit $n > 2$. Montrer que $X^n + 2X + n - 1$ n'a que des racines simples.

Exercice 33.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$$

1. Calculer la multiplicité de 1 en tant que racine de P_n pour tout n .
2. Factoriser P_1, P_2 et P_3 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 34.

Soit un entier $n \geq 2$.

Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

Exercice 35.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

Exercice 36.

Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine du polynôme $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

Exercice 37.

Factoriser $X^4 - 14X^2 + 24X - 8$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il possède une racine multiple.

Exercice 38.

Factoriser $P(X) = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 3$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ sachant que i est racine.

Exercice 39.

Déterminer les racines de $5X^4 + 10X^2 + 1$.

Exercice 40.

Déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 41.

Factoriser $X^6 - 2X^3 \cos(6\theta) + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 42.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\arctan(x)) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que P est nul.

Exercice 43.

Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{5}{(X+1)^5 - X^5 - 1}$.

Exercice 44.

Calculer la primitive suivante :

$$\int^x \frac{\cos t - \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

9 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 45.**

Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n tel que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P^{(k)}(1) = k$.

Exercice 46.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall n \leq \deg(P)$, on a $P^{(n)}(a) > 0$. Montrer que le polynôme P n'admet pas de racine dans l'intervalle $[a; +\infty[$.

Exercice 47.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) - X$ divise $P \circ P(X) - X$.
2. En déduire les solutions de $(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2$.

Exercice 48.

Soit $P(X) = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1} \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer les racines de P . En déduire $\sum_{k=1}^{2n} \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 49.

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $A(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $(B, C) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $A = B^2 + C^2$.

Exercice 50.

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \bar{z}$.

Exercice 51.

Déterminer les polynômes P vérifiant

$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

Exercice 52.

Déterminer les polynômes P vérifiant $P'P'' = 18P$.

Exercice 53.

Déterminer les polynômes tels que $P(X+1) - P(X) = X$.

Memo

- Comment déterminer les racines d'un polynôme?
 - Trouver des racines et factoriser
 - Faire un changement de variable
 - Utiliser les relations coefficients/racines
- Comment factoriser un polynôme en facteurs irréductibles?
Chercher les racines sur $\mathbb{C}$ (puis grouper les racines conjuguées deux à deux pour trouver les facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$).
- Comment déterminer le reste/quotient de la division euclidienne?
Prendre des valeurs particulières judicieusement choisies.
- Comment montrer que $A|B$?
Comparer les racines
- Comment déterminer le degré/terme dominant?
 - Faire une récurrence
 - Étudier les coefficients
- Comment montrer qu'un polynôme est nul?
 - Supposer qu'il ne l'est pas et chercher une contradiction.
 - Montrer qu'il a "trop" de racines.
- Comment résoudre une équation fonctionnelle?
Déterminer le degré et les racines