

Devoir maison 7.

à rendre le lundi 23 février

Exercice 1.

Si E est un ensemble et k un entier naturel non nul, une partition de E est un ensemble $\{A_1, \dots, A_k\}$ de parties de E non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est égale à E :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, A_i \neq \emptyset, \quad \forall i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^k A_i = E.$$

Par exemple $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ est une partition de $E = \llbracket 1, 5 \rrbracket$ en trois parties. On notera en particulier que l'ordre des parties $A_1, \dots, A_k$ n'a pas d'incidence sur la définition de la partition. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $S_{n,k}$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties. On pose également, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{0,0} = 1$ et $S_{n,0} = 0$.

Les nombres $S_{n,k}$ sont appelées nombres de Stirling de deuxième espèce.

1. (a) Déterminer la valeur de $S_{3,2}$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que valent $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$?
2. Soit n un entier, $n \geq 2$, soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble à n éléments. On souhaite établir une relation entre $S_{n,k}$, $S_{n-1,k-1}$ et $S_{n-1,k}$.
 - (a) Dans cette question, on étudie l'exemple $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ($n = 4$) et $k = 2$.
 - i. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$.
 - ii. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une contient 4 tout en étant différente du singleton $\{4\}$.
 - iii. Vérifier, pour l'exemple traité, la relation: $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.
 - (b) On revient au cas général.
 - i. Quel est le nombre de partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
 - ii. Quel est le nombre de partitions de E en k parties, dont l'une contient x_n tout en étant différente du singleton $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
 - iii. En déduire que $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$. On pourra, par exemple, procéder par récurrence.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ et deux ensembles $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, $F = \{y_1, \dots, y_k\}$. On note $\sigma_{n,k}$ le nombre d'applications surjectives de E dans F .
 - (a) Que vaut $\sigma_{n,k}$ si $n < k$.
 - (b) Que vaut $\sigma_{n,k}$ si $n = k$.
 - (c) Expliciter les applications surjectives de E dans F lorsque $n = 3$ et $k = 2$ et préciser la valeur de $\sigma_{3,2}$.

(d) Dans cette question, on souhaite obtenir une relation entre $\sigma_{n,k}$ et $S_{n,k}$.

Si f est une application de E dans F et j un entier compris entre 1 et k , on note $A_j = f^{-1}(\{y_j\})$ l'ensemble des antécédents par f de y_j .

i. Étant donné une application f surjective de E dans F , montrer que $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E en k parties. On note $\Pi(f)$ cette partition.

ii. Étant donnée $\mathcal{A}' = \{A'_1, \dots, A'_k\}$ une partition de E en k parties, combien y a-t-il d'applications f surjectives de E dans F telles que $\Pi(f) = \mathcal{A}'$?

iii. En déduire la relation $\sigma_{n,k} = k!S_{n,k}$

5. Montrer, par exemple par récurrence sur n , que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $S_{n,k} \leq (2k)^n$.