

**Programme de colles: semaine 19.**  
*semaine démarrant le 9 mars*

**Question de cours:**

- $a$  est une racine de multiplicité  $m$  de  $P$  ssi  $P^{(k)}(a) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  et  $P^{(m)}(a) \neq 0$ .
- intégrité de  $\mathbb{K}[X]$  + si  $\alpha$  racine de  $P \in \mathbb{R}[X]$  alors  $\bar{\alpha}$  est aussi racine de  $P$ .
- Déterminer les polynômes  $P$  tels que  $P(X+1) = P(X)$ .
- formule de Taylor pour les polynômes (énoncé et démonstration).
- Décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$  + calcul de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

**Attention: pas de PGCD de polynômes ni de polynômes premiers entre eux!**

1. Définition d'un polynôme comme suite nulle à partir d'un certain rang.
2. Coefficient du produit de deux polynômes.
3. intégrité de  $\mathbb{K}[X]$ .
4. propriétés du degré.
5. polynôme dérivée: définition et propriétés.
6. Formule de Taylor pour les polynômes.
7. Définition de diviseurs et multiples.
8. division euclidienne
9. définition de polynômes irréductibles.
10. Caractérisation d'une racine par la division euclidienne, cas de deux racines distinctes.
11. Définition de racine multiple.
12. Caractérisation  $P(X) = (X-a)^m Q(X)$  avec  $Q(a) \neq 0$ .
13. Caractérisation avec les dérivées.
14. Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$ .
15. Décomposition en facteurs irréductibles sur  $\mathbb{C}[X]$  puis sur  $\mathbb{R}[X]$ .
16. Polynômes scindés.
17. nb de racines comptées avec multiplicité majoré par le degré, égalité dans  $\mathbb{C}$  ou si le polynôme est scindé du  $\mathbb{R}$ .
18. Relation coefficients/racines (seuls  $a_0$  et  $a_{n-1}$  sont au programme).
19. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle dont les pôles sont simples (pas de pôles multiples!).