

Correction du DM n 7

Exercice 1 1. (a) La seule décomposition de 3 en somme de deux entiers non nuls est $3 = 1 + 2$. Ainsi, si E est de cardinal 3, toute partition de E en deux, comporte deux ensembles de cardinal respectif 1 et 2. Pour l'ensemble de cardinal 1, il existe $\binom{3}{1} = 3$ possibilités, l'ensemble de cardinal 2 est entièrement déterminé comme le complémentaire du premier dans E . On en déduit

$$S_{3,2} = 3$$

(b) La seule partition de E en une partie est $\{E\}$.

$$S_{n,1} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Il n'y a qu'une façon de faire une partition d'un ensemble de cardinal n en n sous-ensembles non vides : chaque sous-ensemble est un singleton (de cardinal 1); l'ordre de ces singletons n'ayant pas d'incidence, on a

$$S_{n,n} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

2. (a) i. La seule partition de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$ est :

$$\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$$

ii. Les partitions de E en deux, qui ne contiennent pas le singleton $\{4\}$, sont :

$$\begin{aligned} &\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \quad \{\{2, 4\}, \{1, 3\}\} \quad \{\{3, 4\}, \{1, 2\}\} \\ &\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\} \quad \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\} \quad \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\} \end{aligned}$$

iii. Considérons une partition en deux parties de E . Soit elle contient le singleton $\{4\}$, soit elle ne le contient pas. Dénombrons séparément celles qui contiennent le singleton $\{4\}$ et les autres.

Si elle contient comme partie le singleton $\{4\}$, l'autre partie est nécessairement une partition en un seul élément de $E - \{4\}$. Le nombre de partitions de E en deux parties dont l'une est le singleton $\{4\}$ est donc $S_{3,1}$

Si elle ne contient pas le singleton $\{4\}$, on peut l'interpréter comme une partition en deux parties de $E - \{4\}$ à laquelle l'élément 4 a été ajouté dans l'une des deux parties. Réciproquement, chaque partition de $E - \{4\}$ en deux parties, fournit ainsi deux partitions de E en deux parties, qui sont des partitions non composées du singleton $\{4\}$. Ainsi, le nombre de partitions de E en deux parties ne comportant pas le singleton $\{4\}$ est le double du nombre de partitions de $E - \{4\}$ en deux parties, soit $2S_{3,2}$. En résumé, on a montré

$$S_{4,2} = S_{3,1} + 2S_{3,2}$$

ce qui est bien un cas particulier de

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

(b) i. Les partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$ sont en bijection avec les partitions de $E - \{x_n\}$ en $k - 1$ parties. Elles ont donc même cardinal. Le nombre de partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$ est $S_{n-1,k-1}$

- ii. De toute partition de $E - \{x_n\}$ en k parties, on peut construire k partitions distinctes de E en k parties, il suffit d'ajouter x_n à l'une des k parties. On construit ainsi toutes les partitions de E en k parties qui ne comportent pas le singleton $\{x_n\}$. Le nombre de partitions de E en k parties dont aucune n'est $\{x_n\}$ est $kS_{n-1,k}$.
- iii. Soit une partition de E en k parties contient le singleton $\{x_n\}$, soit elle ne le contient pas (réunion disjointe). Le nombre de partitions de E en k parties est donc la somme du nombre de partitions de E en k parties qui contiennent $\{x_n\}$ et du nombre de partitions de E en k parties qui ne contiennent pas $\{x_n\}$:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k} \quad \forall n \geq 2, \forall k \in \{1, \dots, n-1\}$$

Soit P_n la propriété $S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$ pour $n \geq 2$. Démontrons la par récurrence. Pour $n = 2$, la propriété affirme $S_{2,1} = 1$, ce qui est cohérent avec le résultat de la question I.A.1.b. Supposons P_n vraie à un certain rang n et démontrons-la à l'ordre $n + 1$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1,n} &= S_{n,n-1} + nS_{n,n} \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + n \times 1 \quad (\text{d'après la question I.A.1.b et l'hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

$$S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \forall n \geq 2$$

- 3. (a) On suppose $n < k$. Soit f une application de E dans F . Le cardinal de $f(E)$ est inférieur ou égal à $\text{Card}(E) = n$, et donc l'image de E par f est de cardinal strictement plus petit que k . L'application f ne peut pas être surjective.

$$\sigma_{n,k} = 0 \text{ si } k < n$$

- (b) On suppose $n = k$. Toute application surjective est alors nécessairement bijective. Compter le nombre de surjections, c'est compter le nombre de bijections dont on sait qu'il est égal à $n!$

$$\sigma_{n,k} = n! \text{ si } k = n$$

- (c) Soit f une surjection de E dans F . On a $F = \{y_1, y_2\}$. Notons A_1 l'image réciproque de y_1 et A_2 celle de y_2 ; ce sont deux parties de E non vides puisque f est une surjection. De plus, $\{A_1, A_2\}$ est une partition de E . Toutefois, $\{A_2, A_1\}$ est la même partition de E mais correspond à une autre surjection de E dans F . Ainsi, à toute partition en deux parties de E correspond exactement deux surjections de E dans F . On en déduit

$$\sigma_{3,2} = 2S_{3,2} = 6$$

- (d) i. Montrons que $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E : - Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. L'ensemble A_i est une partie de E puisque c'est l'image réciproque par f d'une partie de F . - Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. L'ensemble A_i n'est pas vide puisque f est surjective. - Soit $i, j \in \{1, \dots, k\}$ distincts. L'ensemble $A_i \cap A_j$ est vide car sinon un élément de cette intersection aurait à la fois pour image y_i et y_j ; ce qui est impossible car y_i et y_j

sont supposés distincts. - Tout élément de E admet une image par la fonction f , on a donc $E \subset \bigcup_{i=1}^k$ et l'autre inclusion est claire. La réunion des A_i pour $i \in \{1, \dots, k\}$ est bien E

$\mathcal{A}' = \{\mathcal{A}_\infty, \dots, \mathcal{A}_\parallel\}$ est bien une partition de $\mathcal{E}$

- ii. Soit $\mathcal{A}' = \{\mathcal{A}'_\infty, \dots, \mathcal{A}'_\parallel\}$ une partition de E . Le nombre de surjections associées à cette partition est égal au nombre de bijections entre $\{A'_1, \dots, A'_k\}$ et F ; or le nombre de bijections entre deux ensembles de cardinal k est $k!$. Le nombre de surjections associées à $\mathcal{A}'$ est $k!$.
- iii. On considère l'application qui à une fonction surjective f associe la partition $\Pi(f)$. Chaque partition en k parties de E admet $k!$ antécédents. Par le lemme des bergers, on a donc :

$$\sigma_{n,k} = k! S_{n,k}$$

- 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $HR(n) : "\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, S_{n,k} \leq (2k)^n"$. Démontrons la propriété par récurrence sur n : Pour $n = 1$, les valeurs de k comprises entre 0 et 1 sont 0 et 1 et on vérifie que $S_{1,0} = 0 \leq 0^1$ et que $S_{1,1} = 1 \leq 2^1$.

Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n - 1$. On a donc $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, S_{n-1,k} \leq (2k)^{n-1}$. On cherche à démontrer la propriété à l'ordre n . Soit donc $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Nous allons traiter d'abord le cas où k est compris entre 0 et $n - 1$, puis le cas où $k = n$. Pour $k = 0$, l'inégalité est vraie. Soit k un entier compris entre 1 et $n - 1$. On a

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= S_{n-1,k-1} + k S_{n-1,k} \\ &\leq (2(k-1))^{n-1} + k(2k)^{n-1} \\ &\leq 2^{n-1} [(k-1)^{n-1} + k^n] \\ &\leq 2^{n-1} [k^n + k^n] \\ &\leq (2k)^n \end{aligned}$$

Traisons maintenant le cas $k = n$. On a $S_{n,n} = 1 \leq (2n)^n$.

La propriété est vraie à l'ordre n donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, S_{n,k} \leq (2k)^n,$$