

Indications du TD n 15

Indication 1 Expliciter l'expression de A_n .

Indication 2 Utiliser l'unicité de l'écriture d'un polynôme.

Indication 3 1. Commencez par montrer qu'une solution est de degré 3.
2. Commencez par montrer qu'une solution non nulle est de degré 4.

Indication 4 Raisonner sur les degrés

Indication 6 Raisonner par récurrence sur n .

Indication 7 Déterminer son reste en sachant que son degré est majoré puis trouver les conditions pour que ce reste soit nul.

Indication 9 Traduire en terme de racines

Indication 10 Déterminer la forme du reste en majorant son degré puis évaluer en des valeurs particulières pour trouver ses coefficients

Indication 11 Traduire la divisibilité avec le reste de la division euclidienne.

Indication 12 Appliquer le théorème de Rolle pour montrer que P' est scindé à racines simples puis raisonner par l'absurde.

Indication 13 Poser $Z = X^3$ pour trouver toutes les racines du polynôme.

Indication 14 Remarquer que $-i$ est aussi racine donc P est divisible par $X^2 + 1$.

Indication 15 Écrivez le polynôme sous la forme $A^2 - B^2$.

Indication 16 Trouver toutes les racines complexes et grouper deux à deux celles qui sont conjuguées.

Indication 17 Regarder les racines de $P - Q$.

Indication 18 Considérer le polynôme $Q(X) - X$ avec Q associé à la fonction polynomiale.

Indication 19 Déterminer le degré de P s'il est non nul et trouver des racines évidentes.

Indication 20 1. Évaluer en z puis faites une récurrence.
2. Raisonner par l'absurde et montrer que P admet une infinité de racines.
3. Évaluer en $z + 1$ puis utiliser la question précédente.
4. Montrer que j et $\bar{j}$ ont même multiplicité.

Indication 21 1. Notez d le degré et trouver la relation avec n .

2. Posez $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, injecter puis utilisez l'unicité des coefficients.

3. Vous devriez reconnaître un binôme de Newton.

4. Supposez, par l'absurde, que P admet une racine $a \neq -1$ de multiplicité k .

Indication 22 1. Chercher à écrire la fraction sous la forme $\frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1}$.

2. Chercher les racines du dénominateur.

3. Faites d'abord une division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

Indication 23 1. Poser $u = \sin(t)$.

2. Poser $u = \cos(t)$.

Indication 24 Déterminer le terme dominant de $(X^2 + 3X - 5)^n$.

Indication 26 Prendre des valeurs particulières de X pour déterminer les coefficients du reste, dont vous connaissez une majoration du degré.

Indication 27 Écrire la forme générale du reste et évaluer la division euclidienne en des valeurs bien choisies.

Indication 28 Montrer que les trois racines (simples) de $X^3 + X^2 + X + 1$ sont racines du polynôme.

Indication 29 Montrer que j est racine en utilisant les relations entre j et j^2 .

Indication 30 Supposer que c'est le cas et traduire avec la dérivée.

Indication 31 Montrer que P admet une racine réelle puis que c'est la seule.

Indication 32 Raisonner par l'absurde.

Indication 33 1. Calculer les dérivées successives.

2. Traduire la multiplicité de 1 trouvée à la question précédente et identifier les coefficients restants.

Indication 34 Montrer que 1 est racine de multiplicité au moins 3.

Indication 35 Montrer que 1 est racine de multiplicité au moins 2 du polynôme.

Indication 36 Dériver jusqu'à obtenir un polynôme dont 1 n'est pas racine.

Indication 37 Déterminer cette racine multiple en regardant parmi les racines de P' puis factoriser.

Indication 38 Remarquer que $-i$ est aussi racine donc P est divisible par $X^2 + 1$.

Indication 39 Posez $T = X^2$.

Indication 40 Considérer $(X - 1)P(X)$.

Indication 41 Poser $T = X^3$ pour déterminer les racines sur $\mathbb{C}$.

Indication 42 Il a beaucoup de racines?

Indication 43 Chercher à écrire la fraction sous la forme $\frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X^2+X+1}$.

Indication 44 Poser $u = \sin(t)$.

Indication 45 Raisonner avec le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X + 1)$.

Indication 46 Montrer, en supposant que $a = 0$, que tous les coefficients de P sont strictement positifs et raisonner par l'absurde.

Indication 47 1. Montrer d'abord que $P(X) - X$ divise $P \circ P(X) - P(X)$.

2. Trouver P tel que $P \circ P(x) - x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2$.

Indication 48 Si α est une racine, montrer que $\frac{\alpha + i}{\alpha - i}$ est une racine $2n + 1$ -ièmes de l'unité. Utiliser ensuite les relations coefficients/racines pour déterminer la valeur de la somme.

Indication 49 Qu'est-ce que cela implique sur les racines de A ?

Indication 50 Montrer que le polynôme $P(X) - X$ est nul et obtenir une contradiction.

Indication 51 Montrez que $0, -1$ et -2 sont racines de P , écrivez $P = X(X+1)(X+2)Q(X)$ et montrez que Q est constant.

Indication 52 Montrer qu'une solution non nulle est de degré 3.

Indication 53 Dériver l'égalité.