

Réponses du TD n 15

Réponse 1 le terme dominant de A^n est $2niX^{n-1}$, le terme dominant de P_n est $\frac{(2n)!}{n!}X^n$.

Réponse 2 $Q = \sum_{j=0}^m a_{2j}X^j$

Réponse 3 1. $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$.
2. $P = a_4(x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 3x), a_4 \in \mathbb{R}$

Réponse 5 $L_n(1) = \binom{n}{0}^2 n! = n!$. et le terme dominant de L_n vaut $\frac{(2n)!}{n!}X^n$.

Réponse 8 $X^n = (X-3)(X+3)Q(X) + \frac{1}{6}(3^n - (-3)^n)X + \frac{1}{2}(3^n + (-3)^n)$ et $M^n =$

$$\begin{pmatrix} \frac{3^n + 5(-3)^n}{(-3)^6 - 3^n} & \frac{(-3)^n - 3^n}{(-3)^n + 2 \cdot 3^n} & \frac{(-3)^n - 3^n}{(-3)^6 - 3^n} \\ \frac{(3)^n - 3}{6} & \frac{(-3)^3 - 3^n}{3} & \frac{5(-3)^3 + 3^n}{6} \end{pmatrix}$$

Réponse 9 0 et 2 sont racines

Réponse 10 $\sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.

Réponse 11 $X^n - 1 = (X^d - 1) \left(X^r \sum_{k=0}^{q-1} X^{dk} \right) + X^r - 1 \mid X^n - 1 \Leftrightarrow X^r - 1 = 0$

Réponse 13 $X^6 + X^3 + 1 = \prod_{k=1}^3 \left(X^2 - 2 \cos \left(\frac{2k\pi}{9} \right) X + 1 \right)$.

Réponse 14 $X^4 - X^3 + 6X^2 + 2X - 5 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 5)$

Réponse 15 $(X^2 + 1)^2 + (X^2 - X - 1)^2 = 2(X^2 - 2X + 2) \left(X^2 + X + \frac{1}{2} \right) =$
 $(X^2 - 2X + 2)(2X^2 + 2X + 1)$.

Réponse 16 $P(X) = (X - \sqrt[3]{3}) \prod_{k=1}^3 \left(X^2 - 2\sqrt[3]{3} \cos \frac{2k\pi}{7} + \sqrt[3]{9} \right)$.

Réponse 19 $\{\lambda(X^2 - 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Réponse 21 $a_{k+1} = \frac{n-k}{k+1} a_k, P(X) = a_0(X+1)^n$

Réponse 22 $\frac{X^2 + 1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X} \frac{3X^2 + 3}{(X-1)(X+1)(X+2)} = \frac{1}{X-1} - \frac{3}{X+1} +$
 $\frac{5}{X+2} \frac{X^2 + 1}{X^2 + 4} = 1 - \frac{3}{X^2 + 4}$

Réponse 23 $\int^x \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t} dt = \sin(x) - \frac{1}{\sin(x)} - 6 \arctan(\sin x) \int^x \frac{\sin^3 t}{1 + \cos t} dt =$
 $\frac{\cos^2 x}{2} - \cos x$

Réponse 24 $\frac{(2n)!}{n!}X^n$

Réponse 25 $X^7 - 2X + 1 = (X^5 + X^3 + X)(X^2 - 1) - X + 1. 3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 -$
 $6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47.$

Réponse 26 $4X - 3$ et 5.

Réponse 27 $(1 - (-1)^n)X + 2(-1)^n - 3.$

Réponse 28 Les trois racines sont 1 et $\pm i$.

Réponse 30 non

Réponse 31 $\{\gamma(X - \alpha)^n, (\gamma, \alpha) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}^*\}$

Réponse 33 1 est donc racine de P_n de multiplicité 3. $P_1(X) = (X - 1)^3, P_2(X) = 2(X -$
 $1)^3(X + 1)$ et $P_3(X) = 3(X - 1)^3 \left(X + \frac{2 + i\sqrt{5}}{3} \right) \left(X + \frac{2 - i\sqrt{5}}{3} \right)$

Réponse 36 1 est racine de multiplicité 3 de P

Réponse 37 $P(X) = (X - 2)^2(X + 2 + \sqrt{6})(X + 2 - \sqrt{6})$.

Réponse 38 $X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 3 = (X^2 + 1)(X^2 + 2X + 3)$

Réponse 39 $\pm i \sqrt{5 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

Réponse 40 $e^{\frac{2ki\pi}{5}}$ pour k variant de 1 à 4.

Réponse 41 $X^6 - 2X^3 \cos(6\theta) + 1 = \prod_{k=0}^2 (X^2 - 2 \cos\left(2\theta + \frac{2k\pi}{3}\right) X + 1).$

Réponse 43 $\frac{5}{(X+1)^5 - X^5 - 1} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X^2 + X + 1}.$

Réponse 44 $\int^x \frac{\cos t - \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + \sin x}{\sqrt{2} - \sin x}\right) + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x)$

Réponse 45 $\sum_{k=1}^n \frac{(X-1)^k}{(k-1)!}$

Réponse 47 $x = 2 \pm \sqrt{3}$ ou $x = 1 \pm \sqrt{2}$

Réponse 48 $-i \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, la somme est nulle.

Réponse 51 $P(X) = \lambda X(X+1)(X+2), \lambda \in \mathbb{R}$

Réponse 52 $X^3 + \lambda X^2 + \frac{\lambda^2}{3} X + \frac{\lambda^3}{27}, \lambda \in \mathbb{R}$, ainsi que le polynôme nul.

Réponse 53 $\frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2} X + c$ avec $c \in \mathbb{C}.$