

Réponses du TD n 16

Réponse 1 non. oui. non. oui.

Réponse 4 Soient $A = \{X\}$, $B = \{2X\}$, alors $A \cap B = \emptyset$ donc $\text{vect}(A \cap B) = \{0\}$ mais $\text{vect}(A) = \text{vect}(B) = \text{vect}(X)$ ce qui montre que l'inclusion est stricte.

Réponse 8

1. le vecteur $(-5, 1, 3)$ engendre une famille génératrice de F_1 .
2. une famille génératrice de F_2 est $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 3), (0, 0, 1, -1))$.
3. une famille génératrice de F_3 est $(X^3 - 1)$.

Réponse 9

1. $L_1 = \frac{(X-1)X}{2} = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2}$, $L_2 = \frac{(X+1)X}{2} = \frac{X^2}{2} + \frac{X}{2}$ et $L_3 = 1 - X^2$.
2. $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.
- ? 4. $Q(a_j) = P(a_j)$.

Réponse 13

1. On peut prendre l'ensemble des fonctions constantes
2. On peut prendre l'ensemble des multiples de $x \mapsto x^2 + 1$.

Réponse 14 L'ensemble des suites constantes.

Réponse 15 $\mathbb{R}_2[X]$.

Réponse 16 $F_\alpha \cap F_\beta$ est l'ensemble des polynômes divisible par $(X - \alpha)(X - \beta)$.

Réponse 20 L'ensemble des fonctions affines.

Réponse 21 $\mathbb{R}_1[X]$.

Réponse 23 oui.

Réponse 24

1. l'inclusion est stricte. Prenons par exemple $F = \text{Vect}(1 + X)$, $G = \text{Vect}(1)$, $H = \text{Vect}(X)$. Alors $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ mais $G + H = \mathbb{R}_1[X]$ donc $F \cap (G + H) = F$.
2. l'inclusion est stricte. On reprend le même exemple, on a $F \cap (G + H) = F = \text{Vect}(1 + X)$, $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ donc $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0\}$.

Réponse 25 L'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus $p - 1$.