

Devoir maison 8.

à rendre le jeudi 12 mars pour le groupe 1

1. Soit P et Q deux polynômes tels que $\forall t \in [-1, 1], P(t) = Q(t)$. Montrer que $P = Q$.

Partie I: construction des polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour tout $n \geq 0$,

$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1} - T_n$. Pour tout n , le polynôme T_n ainsi construit est appelé n -ième polynôme de Tchebychev.

2. Montrer que T_n est de degré n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer les coefficients de X^n et X^{n-1} de T_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(\cos \theta) = \cos n\theta$.

Partie II: racines de T_n

Soit $n \in \mathbb{N}$

6. Déterminer les racines de T_n dans $[-1, 1]$
7. En déduire toutes les racines de T_n dans $\mathbb{C}$ et préciser leurs multiplicités.
8. En déduire la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.

9. Donner la valeur explicite du produit $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Partie III: minimum de la norme infinie (facultative)

Dans toute cette partie, on confond un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

10. Soit f une fonction continue, justifier l'existence de $\max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

On note désormais $\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1, 1]} |f(t)|$.

Le but de cette partie est de montrer que pour tout polynôme unitaire de degré n , $\|P\|_\infty$ admet un minimum égal à 2^{1-n}

11. Montrer que $\|T_n\|_\infty = 1$
12. En déduire qu'il existe un polynôme unitaire V_n de degré n , que l'on précisera, tel que $\|V_n\| = 2^{1-n}$.
13. Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose qu'il existe un polynôme unitaire P de degré n tel que $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$.
 - (a) Montrer que $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.
 - (b) On pose, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Donner, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le signe de $(V_n - P)(x_k)$.
 - (c) En déduire que $V_n = P$.

14. Conclure