

Devoir maison 9.

à rendre le lundi 16 mars pour le groupe 2

1. Soit P et Q deux polynômes tels que $\forall t \in [-1, 1], P(t) = Q(t)$. Montrer que $P = Q$.

Partie I: construction des polynômes de Tchebychev

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule de Moivre, montrer qu'il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = T_n(\cos(x))$ (E_n)
2. Montrer que T_n est l'unique polynôme à vérifier (E_n).
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, factoriser $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$
4. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^* : T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$
5. Déterminer le degré de T_n et son terme dominant.

Partie II: racines de T_n

Soit $n \in \mathbb{N}$

6. Déterminer les racines de T_n dans $[-1, 1]$
7. En déduire toutes les racines de T_n dans $\mathbb{C}$ et préciser leurs multiplicités.
8. En déduire la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.
9. Donner la valeur explicite du produit $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Partie III: minimum de la norme infinie (facultative)

Dans toute cette partie, on confond un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

10. Soit f une fonction continue, justifier l'existence de $\max_{t \in [0,1]} |f(t)|$.
On note désormais $\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.

Le but de cette partie est de montrer que pour tout polynôme unitaire de degré n , $\|P\|_\infty$ admet un minimum égal à 2^{1-n}

11. Montrer que $\|T_n\|_\infty = 1$
12. En déduire qu'il existe un polynôme unitaire V_n de degré n , que l'on précisera, tel que $\|V_n\| = 2^{1-n}$.
13. Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose qu'il existe un polynôme unitaire P de degré n tel que $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$.
 - (a) Montrer que $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.
 - (b) On pose, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Donner, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le signe de $(V_n - P)(x_k)$.
 - (c) En déduire que $V_n = P$.
14. Conclure