

Correction du DM8

Partie I: construction des polynômes de Tchebychev

1. Montrer que T_n est de degré n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On procède par récurrence double sur n . La propriété est vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$. Supposons que T_n est de degré n et T_{n-1} de degré $n - 1$ avec $n \geq 1$. Alors $2XT_n$ est de degré $n + 1$ et T_{n-1} est de degré $n - 1$; par conséquent T_{n+1} est de degré $n + 1$.

2. Déterminer les coefficients de X^n et X^{n-1} de T_n , pour tout $n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$.

On remarque que pour $n \geq 2$, le coefficient dominant de T_n est le double du coefficient dominant de T_{n-1} . Comme $T_1 = X$, on montre par récurrence descendante que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .

Pour le coefficient devant X^{n-1} , on procède également par récurrence. C'est vrai pour T_1 . On calcule $T_2 = 2X^2 - 1$, donc le coefficient devant X est nul. Supposons que cela soit vrai pour un entier $n \geq 1$ et montrons-le au rang $n + 1$. Alors, comme $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}$, et $\deg(T_{n-1}) = n - 1$, le coefficient devant X^n est le double du coefficient devant X^{n-1} de T_n qui est (par hypothèse de récurrence) nul. Cela achève de montrer le résultat.

On peut aussi le montrer par récurrence simple sur n en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, HR(n): " $T_n = 2^{n-1}X^n + Q_n(X)$ " avec $\deg(Q_n) < n - 1$. Le résultat est vrai au rang 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que HR(n) est vraie. On a $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} = 2X^n + 2XQ_n - T_{n-1}$ avec $\deg(2XQ_n - T_{n-1}) \leq n - 1 < n$. La propriété est bien héréditaire.

Évitez d'appeler a_n et a_{n-1} les deux coefficients devant X^n et X^{n-1} dans T_n et a_{n-1} , a_{n-2} ceux de T_{n-1} ...

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

On le montre par récurrence forte sur n . L'initialisation est vraie puisque, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0.\theta)$ et $T_1(\cos \theta) = \cos \theta$. On suppose qu'il existe un entier n tel que, $\forall k \leq n$, on ait "pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$ ". Montrons-le pour $n + 1$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_n(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

On écrit $\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta) \cos \theta + \sin(n\theta) \sin \theta$ et on obtient

$$T_{n+1}(\cos \theta) = \cos \theta \cos(n\theta) - \sin \theta \sin(n\theta) = \cos((n+1)\theta)$$

Le résultat est vrai au rang $n + 1$. On a montré, par récurrence forte sur n , que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_n(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta)$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(\cos \theta) = \cos n\theta$.

Supposons donc qu'il existe un autre polynôme P tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. Alors $P - T_n$ admet $\cos(\theta)$ pour racines, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ donc une infinité de racines ce qui montre que $P - T_n = 0$ d'où l'unicité de T_n . *Inutile de raisonner par l'absurde.*

Partie II: racines de T_n

5. Déterminer les racines de T_n dans $[-1, 1]$

Soit $x \in [-1, 1]$. Alors il existe $\theta \in [0, \pi[$ tel que $x = \cos \theta$. On cherche donc les racines de T_n dans $[-1, 1]$ sous la forme $\cos \theta$. On sait que

$$\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\pi}{n} \right] \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

Par ailleurs, $\theta \in [0, \pi] \Leftrightarrow k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On sait donc que $\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ est racine de T_n pour tout $k = 0 \dots n-1$. Montrons maintenant qu'elles sont distinctes. On a

$$\frac{\pi}{2n} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\cos$ est injectif sur cet intervalle, ce qui montre bien que les cosinus de ces valeurs sont distincts.

Si vous ne précisez pas que θ varie dans $[0, \pi[$ et prenez simplement θ réel, vous obtenez que les racines de T_n dans $[-1, 1]$ sont $\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ pour k variant dans $\mathbb{Z}$. Enlever les répétitions n'est pas si simple. On peut déjà, par 2π -périodicité de $\cos$, réduire aux angles compris entre $-\pi$ et π puis, par parité de $\cos$, enlever encore la moitié des valeurs de k pour obtenir $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Le plus simple, reste sans doute, de remarquer qu'en faisant varier k entre 0 et $n-1$, on obtient, par injectivité de $\cos$, n racines distinctes de T_n et qu'il ne peut donc pas y en avoir d'autres (ni dans $[-1, 1]$ ni ailleurs).

6. En déduire toutes les racines de T_n dans $\mathbb{C}$ et préciser leurs multiplicités.

On a exhibé n racines distinctes de T_n à la question précédente et nous savons que T_n est de degré n . On a donc trouvé toutes les racines de T_n et, comme il y en a n , elles sont simples.

7. En déduire la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme les n racines trouvées sont réelles, on a $T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \right)$.

8. Donner la valeur explicite du produit $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

On sait que

$$T_n(0) = 2^{n-1} (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

On a $T_n(0) = T_n\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{n\pi}{2}$. On en déduit que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^n \cos \frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}}.$$

Si $n = 2m$, on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{\cos(m\pi)}{2^{n-1}} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}$$

Si $n = 2m + 1$, alors

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = -\frac{\cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2^{2m}} = 0.$$

Partie III: minimum de la norme infinie

Dans toute cette partie, on confond un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

9. Soit f une fonction continue, justifier l'existence de $\max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.

La fonction f étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée et atteint ses bornes, elle admet donc un maximum sur $[0, 1]$.

10. Montrer que $\|T_n\|_\infty = 1$

Soit $x \in [-1, 1]$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. On a alors $T_n(x) = T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ donc $|T_n(x)| \leq 1$. Par ailleurs, $T_n(1) = \cos(0) = 1$ donc on a bien $\|T_n\|_\infty = 1$.

11. En déduire qu'il existe un polynôme unitaire V_n de degré n , que l'on précisera, tel que $\|V_n\|_\infty = 2^{n-1}$.

On sait que T_n a pour coefficient dominant 2^{n-1} donc $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ est unitaire et

$$\forall x \in [-1, 1], |2^{1-n}T_n(x)| \leq 2^{1-n},$$

ce majorant étant atteint pour $x = 0$. On en déduit que $21 - nT_n$ est bien un polynôme unitaire vérifiant $\|2^{1-n}T_n\|_\infty = 2^{1-n}$.

12. Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose qu'il existe un polynôme unitaire P de degré n tel que $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$.

(a) Montrer que $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.

Comme P et T_n sont unitaires, le terme en X^n de la différence est nul, on a donc $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.

(b) On pose, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Donner, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le signe de $(V_n - P)(x_k)$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned} (V_n - P)(x_k) &= V_n(x_k) - P(x_k) \\ &= 2^{1-n}T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) - P(x_k) \\ &= 21 - n \cos(k\pi) - P(x_k) \\ &= 2^{1-n}(-1)^k - P(x_k) \end{aligned}$$

Or $|P(x_k)| < 21 - n$ donc

$$2^{n-1}((-1)^k - 1) \leq (V_n - P)(x_k) \leq 2^{1-n}((-1)^k + 1).$$

On en déduit que $(V_n - P)(x_k)$ est positif pour k pair et négatif pour k impair donc il est du même signe que $(-1)^k$.

(c) *En déduire que $V_n = P$.*

D'après la question précédente, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $V_n - P$ entre x_k et x_{k+1} pour k variant de 0 à $n - 1$. Cela nous donne n racines distinctes de $V_n - P$ car $x_0 > x_1 > \dots > x_n$ par stricte décroissance de $\cos$ sur $[0, \pi]$. Or, ce polynôme est de degré au plus $n - 1$, il est donc nul.

13. *conclure*

On a montré que si P est unitaire et $\|P\|_\infty < 2^{n-1}$, alors $P = V_n$ ce qui est absurde puisque $\|V_n\|_\infty = 2^{1-n}$. Ainsi, on a montré, par l'absurde, que pour tout polynôme unitaire P , $\|P\| \geq 2^{1-n}$. Par ailleurs, ce minorant est atteint pour V_n . Ainsi, on a montré que l'ensemble

$$\{\|P\|_\infty, P \text{ unitaire} \},$$

admet un minimum égal à 2^{1-n} .

Correction du DS n 8
