

Correction du DM9

Partie I: construction des polynômes de Tchebychev

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule de Moivre : $(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$, montrer qu'il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = T_n(\cos(x)) \quad (E_n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

On sait que $(\cos(x) + i \sin(x)) = \cos(nx) + i \sin(nx)$ donc $\cos(nx) = \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^n)$.

On a

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^n) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin(x)^k \cos(x)^{n-k}\right) \end{aligned}$$

On remarque que seuls les termes d'indices pairs sont réels, les autres sont imaginaires purs. Ainsi,

$$\cos(nx) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} i^k \sin(x)^k \cos(x)^{n-k}$$

On pose $2j = k$, j varie de 0 à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ donc

$$\cos(nx) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j \sin^{2j}(x) \cos^{n-2j}(x),$$

puis

$$\cos(nx) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j (1 - \cos^2(x))^j \cos^{n-2j}(x).$$

On pose

$$T_n(X) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j (1 - X^2)^j X^{n-2j}.$$

D'après ce qui précède, on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, factoriser

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) &= \operatorname{Re}(e^{i(n+1)x} + e^{i(n-1)x}) \\ &= \operatorname{Re}(e^{inx} 2 \cos(x)) \\ &= 2 \cos(nx) \cos(x)\end{aligned}$$

3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, alors, d'après la question précédente:

$$T_{n+1}(\cos(x)) + T_{n-1}(\cos(x)) = \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2 \cos(x) \cos(nx) = 2 \cos(x) T_n(\cos(x)).$$

Ainsi, $\cos(x)$ est racine du polynôme $T_{n+1}(X) - 2XT_n(X) + T_{n-1}(X)$. Ce polynôme admet donc une infinité de racines. Par conséquent, il est nul.

On a bien

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

Partie II: racines de T_n

4. Déterminer les racines de T_n dans $[-1, 1]$

Soit $x \in [-1, 1]$. Alors il existe $\theta \in [0, \pi[$ tel que $x = \cos \theta$. On cherche donc les racines de T_n dans $[-1, 1]$ sous la forme $\cos \theta$. On sait que

$$\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\pi}{n} \right] \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

Par ailleurs, $\theta \in [0, \pi] \Leftrightarrow k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On sait donc que $\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ est racine de T_n pour tout $k = 0 \dots n-1$. Montrons maintenant qu'elles sont distinctes. On a

$$\frac{\pi}{2n} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\cos$ est injectif sur cet intervalle, ce qui montre bien que les cosinus de ces valeurs sont distincts.

Si vous ne précisez pas que θ varie dans $[0, \pi[$ et prenez simplement θ réel, vous obtenez que les racines de T_n dans $[-1, 1]$ sont $\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ pour k variant dans $\mathbb{Z}$. Enlever les répétitions n'est pas si simple. On peut déjà, par 2π -périodicité de $\cos$, réduire aux angles compris entre $-\pi$ et π puis, par parité de $\cos$, enlever encore la moitié des valeurs de k pour obtenir $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Le plus simple, reste sans doute, de remarquer qu'en faisant varier k entre 0 et $n-1$, on obtient, par injectivité de $\cos$, n racines distinctes de T_n et qu'il ne peut donc pas y en avoir d'autres (ni dans $[-1, 1]$ ni ailleurs).

5. En déduire toutes les racines de T_n dans $\mathbb{C}$ et préciser leurs multiplicités.

On a exhibé n racines distinctes de T_n à la question précédente et nous savons que T_n est de degré n . On a donc trouvé toutes les racines de T_n et, comme il y en a n , elles sont simples.

6. En déduire la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme les n racines trouvées sont réelles, on a $T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \right)$.

7. Donner la valeur explicite du produit $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

On sait que

$$T_n(0) = 2^{n-1}(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

On a $T_n(0) = T_n\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{n\pi}{2}$. On en déduit que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^n \cos\frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}}.$$

Si $n = 2m$, on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{\cos(m\pi)}{2^{n-1}} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}$$

Si $n = 2m + 1$, alors

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = -\frac{\cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2^{2m}} = 0.$$

Partie III: minimum de la norme infinie

Dans toute cette partie, on confond un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

8. Soit f une fonction continue, justifier l'existence de $\max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.

La fonction f étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée et atteint ses bornes, elle admet donc un maximum sur $[0, 1]$.

9. Montrer que $\|T_n\|_\infty = 1$

Soit $x \in [-1, 1]$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. On a alors $T_n(x) = T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ donc $|T_n(x)| \leq 1$. Par ailleurs, $T_n(1) = \cos(0) = 1$ donc on a bien $\|T_n\|_\infty = 1$.

10. En déduire qu'il existe un polynôme unitaire V_n de degré n , que l'on précisera, tel que $\|V_n\|_\infty = 2^{n-1}$.

On sait que T_n a pour coefficient dominant 2^{n-1} donc $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ est unitaire et

$$\forall x \in [-1, 1], |2^{1-n}T_n(x)| \leq 2^{1-n},$$

ce majorant étant atteint pour $x = 0$. On en déduit que $2^{1-n}T_n$ est bien un polynôme unitaire vérifiant $\|2^{1-n}T_n\|_\infty = 2^{1-n}$.

11. Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose qu'il existe un polynôme unitaire P de degré n tel que $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$.

- (a) Montrer que $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.

Comme P et T_n sont unitaires, le terme en X^n de la différence est nul, on a donc $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.

- (b) On pose, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Donner, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le signe de $(V_n - P)(x_k)$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned}(V_n - P)(x_k) &= V_n(x_k) - P(x_k) \\ &= 2^{1-n} T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) - P(x_k) \\ &= 2^{1-n} \cos(k\pi) - P(x_k) \\ &= 2^{1-n} (-1)^k - P(x_k)\end{aligned}$$

Or $|P(x_k)| < 2^{1-n}$ donc

$$2^{n-1}((-1)^k - 1) \leq (V_n - P)(x_k) \leq 2^{1-n}((-1)^k + 1).$$

On en déduit que $(V_n - P)(x_k)$ est positif pour k pair et négatif pour k impair donc il est du même signe que $(-1)^k$.

- (c) *En déduire que $V_n = P$.*

D'après la question précédente, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $V_n - P$ entre x_k et x_{k+1} pour k variant de 0 à $n-1$. Cela nous donne n racines distinctes de $V_n - P$ car $x_0 > x_1 > \dots > x_n$ par stricte décroissance de $\cos$ sur $[0, \pi]$. Or, ce polynôme est de degré au plus $n-1$, il est donc nul.

12. *conclure*

On a montré que si P est unitaire et $\|P\|_\infty < 2^{n-1}$, alors $P = V_n$ ce qui est absurde puisque $\|V_n\|_\infty = 2^{1-n}$. Ainsi, on a montré, par l'absurde, que pour tout polynôme unitaire P , $\|P\| \geq 2^{1-n}$. Par ailleurs, ce minorant est atteint pour V_n . Ainsi, on a montré que l'ensemble

$$\{\|P\|_\infty, P \text{ unitaire} \},$$

admet un minimum égal à 2^{1-n} .

Correction du DM n 9
