

TD 16 : Algèbre linéaire.

1 sous-espaces vectoriels

Exercice 1.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-ev?

1. $F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X], P(X+1) = P^2(X)\}$
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y + z\}$
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = yz\}$
4. F_4 l'ensemble des fonctions paires

Exercice 2.

Soit $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 3u_n + 2nu_{n-1}\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3.

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = f'(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 4.

Montrer que $\text{vect}(A \cap B) \subset \text{vect}(A) \cap \text{vect}(B)$ mais qu'il n'y a, en général, pas égalité.

2 Familles libres, génératrices

Exercice 5.

On note f_1, f_2, f_3, f_4 les fonctions de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x \cos x$, $f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x \sin x$. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 6.

Montrer que les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 7.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et (x, y, z) une famille libre de E . Montrer que $(x + y, y + z, z + x)$ est une famille libre de E .

Exercice 8.

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et déterminer une famille génératrice de chacun d'eux.

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y + 3z = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y - z = t\}$.
3. $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)\}$.

Exercice 9.

Soit $(a_1, \dots, a_p)$ des réels distincts. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $L_i = \prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq i}} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$.

1. Expliciter L_1, L_2 et L_3 dans le cas particulier où $(a_1, a_2, a_3) = (-1, 1, 0)$.
2. Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, calculer $L_i(a_j)$.
3. Montrer que la famille $(L_1, \dots, L_p)$ est libre.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, on pose $Q = \sum_{i=1}^p P(a_i)L_i(X)$. Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, calculer $Q(a_j)$.
5. En déduire que $(L_1, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

3 Sous-espaces supplémentaires et somme directe

Exercice 10.

Soit $F = \mathbb{R}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P'(0) = 0 = P(0)\}$ et $H = \text{vect}(1 + X)$. Montrer que F, G et H sont en somme directe.

Exercice 11.

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), f(0) = \int_0^1 f(t) dt = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Exercice 12.

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P'(1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(X^3 + 2)$ sont en somme directe.

4 Détermination d'un supplémentaire

Exercice 13.

1. Déterminer un supplémentaire de $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) + f'(0) = 0\}$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
2. Déterminer un supplémentaire de F engendré par une fonction non constante.

Exercice 14.

Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_3 = 0\}$.

1. les L_i sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange

Exercice 15.

Soit $A = X^3 - 4X + 2$. On note $F = \{P \in \mathbb{R}[X], A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

5 Si besoin d'encore un peu d'entraînement**Exercice 16.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $F_\alpha = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(\alpha) = 0\}$.

1. Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $F_\alpha \cap F_\beta$.

Exercice 17.

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On note $F = \{x \mapsto ax \ln(x) + b \ln(x), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 18.

Montrer que les deux ensembles $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax^2 + bx + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 19.

Soit F l'ensemble des fonctions constantes et $G = \left\{f \in \mathcal{C}(R), \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Exercice 20.

Déterminer un supplémentaire de $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 21.

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = P(2)\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 22.

Pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on pose $f_k : x \mapsto \cos(kx)$. Montrer que la famille $(\cos(kx))_{k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ est libre.

Exercice 23.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n désigne le polynôme de Tchébychev. Soit $m \in \mathbb{N}$. La famille $(T_0, \dots, T_m)$ est-elle libre?

6 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 24. ✿**

Soit F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Comparer $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.
2. Comparer $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

3. Montrer que $F \cap (G + F \cap H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 25. ✿

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ deux à deux distincts dans $[0, 1]$. On pose

$$F = \{f \in E, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(a_i) = 0\}.$$

Déterminer un supplémentaire de F dans E .

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E .

Exercice 26. ✿

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $f_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $g_k : x \mapsto \cos^k(x)$ et on note T_k le k ème polynôme de Tchébychev.

1. Montrer que $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $\text{vect}(f_0, \dots, f_n) = \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$.

Memo

- Comment montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel?
 - Revenir à la définition
 - Montrer que c'est l'espace engendré par une partie
 - Montrer que c'est le noyau ou l'image d'une application linéaire
- Comment montrer une inclusion entre deux sous-espaces vectoriels?
 - Raisonner avec les éléments
 - Raisonner avec les ensembles
- Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux?
 - Montrer la double inclusion
- Comment montrer qu'une famille est libre?
 - Résoudre un système
 - Prendre des valeurs particulières, dériver ou passer à la limite lorsque c'est une famille de fonctions.
 - Reconnaître une famille libre, à permutation près (polynômes de degrés échelonnés, famille échelonnée de R^n)
- Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe?
 - Prendre un élément de l'intersection et montrer qu'il est nul.
- Comment montrer que deux sous-espaces de E sont supplémentaires dans E ?
 - Utiliser l'unicité de l'écriture.
 - Procéder par analyse/synthèse (supposer que tout élément de E s'écrit comme la somme de deux éléments et expliciter ces deux éléments).
- Comment déterminer un supplémentaire dans E d'un sous-espace vectoriel F ?
 - Trouver F' tel que $F + F' = E$ puis montrer que $F \cap F' = \{0\}$ (ce qui peut se faire en utilisant l'unicité de l'écriture)

Indications n 16

Indication 2 Prendre deux éléments $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F et montrer que $(\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à F .

Indication 3 Prendre deux éléments f et g de F et montrer que $\lambda f + g$ est un élément de F .

Indication 4 Remarquer que $A \cap B \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ pour l'inclusion. Trouver un contre-exemple avec $A \cap B = \emptyset$ et $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(B)$.

Indication 5 Poser des réels α_i tels que $\forall x \in [0, 2\pi], \sum_{k=1}^4 \alpha_k f_k(x) = 0$ et prendre des valeurs particulières de x .

Indication 6 Poser des réels α_i tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_1 1 + \alpha_2 n^2 + \alpha_3 2^n = 0$ et prendre des valeurs particulières de n .

Indication 7 Prendre une combinaison linéaire nulle de la famille et faire apparaître une combinaison linéaire de la famille (x, y, z) .

Indication 8 Déterminer la forme générale des éléments de chaque ensemble.

Indication 11 Montrer, par analyse/synthèse, que toute fonction continue s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G puis montrer que F et G sont en somme directe.

Indication 12 Prendre un élément de l'intersection et montrer qu'il est nul.

Indication 13 Que faut-il soustraire à un élément quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ pour qu'il appartienne à F ?

Indication 14 Que faut-il soustraire à une suite quelconque pour qu'elle appartienne à F ?

Indication 15 Penser à la division euclidienne.

Indication 16 1. Prendre deux éléments $(P, Q) \in F_\alpha^2$ et montrer que $\lambda P + Q$ s'annule en α .

2. Traduire l'appartenance à l'intersection selon que $\alpha = \beta$ ou non.

Indication 17 Prendre deux éléments f et g dans F et montrer que $\lambda f + g \in F$.

Indication 18 Raisonner par analyse/synthèse.

Indication 19 Raisonner par analyse/synthèse.

Indication 20 Chercher du côté des fonctions affines.

Indication 21 Est-ce qu'un espace engendré par un polynôme de degré 1 fonctionne?

Indication 22 Poser des réels α_i tels que $\forall x \in [0, 2\pi], \sum_{k=1}^4 \alpha_k f_k(x) = 0$ et prendre des valeurs particulières de x .

Indication 24 1. Montrer une inclusion puis montrer qu'elle est stricte.

2. Montrer une inclusion puis montrer qu'elle est stricte.

3. Montrer l'égalité par double inclusion.

Indication 25 Utiliser les polynômes de Lagrange.

Indication 26 1. Se ramener à un système de Cramer.

2. Procéder par double inclusion en utilisant les T_i .

Réponses du TD n 16

Réponse 1 non. oui. non. oui.

Réponse 4 Soient $A = \{X\}$, $B = \{2X\}$, alors $A \cap B = \emptyset$ donc $\text{vect}(A \cap B) = \{0\}$ mais $\text{vect}(A) = \text{vect}(B) = \text{vect}(X)$ ce qui montre que l'inclusion est stricte.

Réponse 8

1. le vecteur $(-5, 1, 3)$ engendre une famille génératrice de F_1 .
2. une famille génératrice de F_2 est $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 3), (0, 0, 1, -1))$.
3. une famille génératrice de F_3 est $(X^3 - 1)$.

Réponse 9

1. $L_1 = \frac{(X-1)X}{2} = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2}$, $L_2 = \frac{(X+1)X}{2} = \frac{X^2}{2} + \frac{X}{2}$ et $L_3 = 1 - X^2$.
2. $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.
- ? 4. $Q(a_j) = P(a_j)$.

Réponse 13

1. On peut prendre l'ensemble des fonctions constantes
2. On peut prendre l'ensemble des multiples de $x \mapsto x^2 + 1$.

Réponse 14 L'ensemble des suites constantes.

Réponse 15 $\mathbb{R}_2[X]$.

Réponse 16 $F_\alpha \cap F_\beta$ est l'ensemble des polynômes divisible par $(X - \alpha)(X - \beta)$.

Réponse 20 L'ensemble des fonctions affines.

Réponse 21 $\text{Vect}(X)$.

Réponse 23 oui.

Réponse 24

1. l'inclusion est stricte. Prenons par exemple $F = \text{Vect}(1 + X)$, $G = \text{Vect}(1)$, $H = \text{Vect}(X)$. Alors $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ mais $G + H = \mathbb{R}_1[X]$ donc $F \cap (G + H) = F$.
2. l'inclusion est stricte. On reprend le même exemple, on a $F \cap (G + H) = F = \text{Vect}(1 + X)$, $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ donc $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0\}$.

Réponse 25 L'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus $p - 1$.

Correction du TD n 16

Correction 1

1. $1 \in F_1$ mais $2 \notin F_1$ donc F_1 n'est pas un ssev de $\mathbb{R}[X]$.
2. On a $(0, 0, 0) \in F_2$. Soit $((x, y, z), (x', y', z')) \in F_2^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda(x, y, z) + (x', y', z') \in F_2$. On a $\lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ et

$$\begin{aligned} (\lambda y + y') + (\lambda z + z') &= \lambda \underbrace{(y + z)}_{=x \text{ car } (x, y, z) \in F_2} + \underbrace{(y' + z')}_{=x' \text{ car } (x', y', z') \in F_2} \\ &= \lambda y' + z' \end{aligned}$$

On a bien $\lambda(x, y, z) + (x', y', z') \in F_2$ donc F_2 ssev de $\mathbb{R}^3$.

3. On a $(1, 1, 1) \in F_3$ et $2(1, 1, 1) \notin F_3$ donc F_3 n'est pas un ssev.
4. La fonction nulle est paire. Soit f, g deux fonctions paires, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + g$ est paire. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(-x) &= \lambda f(-x) + g(-x) \\ &= \lambda f(x) + g(x) \text{ car } f \text{ et } g \text{ paires} \end{aligned}$$

On a bien $\lambda f + g$ paire donc F_4 est un ssev de l'ensemble des fonctions.

Correction 2 On remarque que la suite nulle vérifie la relation donc elle appartient à F ce qui montre que F est non vide. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $(\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à F . On a :

$$3(\lambda u_n + v_n) + 2n(\lambda u_{n-1} + v_{n-1}) = \lambda \underbrace{(3u_n + 2nu_{n-1})}_{=u_{n+1} \text{ car } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F} + \underbrace{(3v_n + 2nv_{n-1})}_{=v_{n+1} \text{ car } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F},$$

ainsi, on a

Correction 3 On remarque que la fonction nulle vérifie $f(0) = f'(1) = 0$ donc elle appartient à F ce qui montre que F est non vide. Soient maintenant f et g deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + g$ est un élément de F . On a :

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(0) &= \lambda f(0) + g(0) \\ &= 0 \text{ car } f(0) = g(0) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)'(1) &= \lambda f'(1) + g'(1) \\ &= 0 \text{ car } f'(1) = g'(1) = 0 \end{aligned}$$

On a donc bien $\lambda f + g \in F$, ce qui montre que F est un sous-espace vectoriel.

Correction 4 On a $A \cap B \subset A$ et $A \subset \text{vect}(A)$ donc $A \cap B \subset \text{Vect}(A)$. De même, $A \cap B \subset B$ et $B \subset \text{vect}(B)$ donc $A \cap B \subset \text{Vect}(B)$. On a alors $A \cap B \subset \text{vect}(A) \cap \text{vect}(B)$. Comme $\text{vect}(A) \cap \text{vect}(B)$ est un espace vectoriel qui contient $A \cap B$, on a $\text{vect}(A \cap B) \subset \text{vect}(A) \cap \text{vect}(B)$.

Montrons qu'il n'y a, en général, pas égalité. Soient $A = \{X\}$, $B = \{2X\}$, alors $A \cap B = \emptyset$ donc $\text{vect}(A \cap B) = \{0\}$ mais $\text{vect}(A) = \text{vect}(B) = \text{vect}(X)$ ce qui montre que l'inclusion est stricte.

Correction 5 Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ quatre réels tels que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 \cos x + \alpha_2 x \cos x + \alpha_3 \sin x + \alpha_4 x \sin x = 0.$$

Pour $x = 0$, on obtient $\alpha_1 = 0$. On pose ensuite $x = \pi$, ce qui donne $\pi \alpha_2 = 0$ donc $\alpha_2 = 0$. On évalue ensuite en $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$, on obtient $\alpha_3 + \frac{\pi}{2} \alpha_4 = 0$ et $-\alpha_3 - \frac{3\pi}{2} \alpha_4 = 0$ ce qui implique $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ et la famille est par conséquent libre.

Correction 6 Soient λ, μ, ν trois réels tels que la suite $(\lambda + \mu n^2 + \nu 2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit nulle et montrons que $\lambda = \mu = \nu = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lambda + \mu n^2 + \nu 2^n = 0$$

On a donc, pour $n = 0, 1$ et 2 ,

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 4\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\nu \\ \mu = \lambda \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda = \mu = \nu = 0$ et la famille est bien libre.

Correction 7 Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha(x+y) + \beta(y+z) + \gamma(z+x) = 0$, on a alors :

$$(\alpha + \gamma)x + (\alpha + \beta)y + (\beta + \gamma)z = 0$$

et comme la famille (x, y, z) est libre, on a $\alpha + \gamma = \alpha + \beta = \beta + \gamma = 0$ ce qui impose $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Correction 8

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par équivalence :

$$(a, b, c) \in F_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c &= 0 \\ 2a+b+3c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b-c &= 0 \\ 3a+5c &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b, c) = \frac{c}{3}(-5, 1, 3).$$

Par équivalence, on a montré : $F_1 = \text{Vect}(-5, 1, 3)$ donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et le vecteur $(-5, 1, 3)$ engendre une famille génératrice de F_1 .

2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On raisonne par équivalence :

$$(a, b, c, d) \in F_2 \Leftrightarrow a+3b-c=d \\ \Leftrightarrow (a, b, c, d) = a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 3) + c(0, 0, 1, -1).$$

Par équivalence, on a montré $F_2 = \text{Vect}(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 3), (0, 0, 1, -1)$ donc F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et une famille génératrice de F_2 est $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 3), (0, 0, 1, -1))$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On raisonne par équivalence :

$$P \in F_3 \Leftrightarrow P(X^2) = (X^3 + 1)P(X).$$

On écrit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a alors

$$P \in F_3 \Leftrightarrow aX^6 + bX^4 + cX^2 + d = (X^3 + 1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ \Leftrightarrow aX^6 + bX^4 + cX^2 + d = aX^6 + bX^5 + cX^4 + (a+d)X^3 + bX^2 + cX + d \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b &= 0 \\ b &= c \\ a+d &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow b=c=0 \text{ et } a=-d \\ \Leftrightarrow P = a(X^3 - 1)$$

On a montré, par équivalence, $F_3 = \text{Vect}(X^3 - 1)$ ce qui montre que F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et il est donc engendré par $X^3 - 1$.

Correction 9

$$1. L_1 = \frac{(X-1)X}{2} = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2}, L_2 = \frac{(X+1)X}{2} = \frac{X^2}{2} + \frac{X}{2} \text{ et } L_3 = 1 - X^2.$$

2. On a $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $L_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(a_i) = 1$.

3. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i L_i = 0$ (polynôme nul). On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i L_i(x) = 0$. En particulier, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i L_i(a_j) = 0$ donc $\lambda_j = 0$ en utilisant la question précédente. Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_j = 0$. La famille est donc bien libre.

$$4. \text{ Soit } P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]. \text{ On a } Q(a_j) = \sum_{i=1}^p P(a_i) L_i(a_j) = P(a_j) \text{ car } L_j(a_i) = \delta_{ij}.$$

5. D'après la question précédente, on a pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $P(a_j) = Q(a_j)$. Or $P - Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et on a trouvé p racines distinctes de ce polynôme (les a_j). On en déduit que $P - Q$ est nul donc on a montré que tout polynôme de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire des L_i , la famille $(L_1, \dots, L_p)$ est donc génératrice de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$. On en déduit, comme c'est une famille libre, que la famille $(L_1, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Correction 10 Soit $P \in F + G + H$, alors $P = a + A + \lambda(1 + X)$ avec $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et $A \in G$. Montrons que (a, A, λ) est unique. On a $\lambda + a = P(0)$ et $\lambda = P'(0)$ donc $a = P(0) - P'(0)$ puis $A = P - P(0) - P'(0)X$ ce qui montre l'unicité de l'écriture. La somme est bien directe.

Correction 11 Montrons, par analyse/synthèse, que toute fonction continue s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Analyse : Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$. On sait qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) + ax + b.$$

Cela implique, d'une part, $h(0) = b$ et, d'autre part, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 h(t) dt = \underbrace{\int_0^1 f(t) dt}_{=0 \text{ car } f \in F} + \int_0^1 (at + b) dt.$$

$$\text{On a donc } \int_0^1 h(t) dt = \frac{a}{2} + b \text{ d'où } a = 2 \left(\int_0^1 h(t) dt \right) - 2h(0).$$

Synthèse : Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Posons $b = h(0)$, $a = 2 \left(\int_0^1 h(t) dt \right) - 2h(0)$, $g : x \mapsto ax + b$ et $f = h - g$. Montrons que :

- $f \in F$,
- $g \in G$ et
- $h = f + g$.

Les deux derniers points sont clairs, montrons le premier :

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 h(t) - g(t) dt = \int_0^1 h(t) dt - \int_0^1 (at + b) dt = \int_0^1 h(t) dt - \frac{a}{2} - b.$$

Par définition de a et b , on a bien $\int_0^1 f(t) dt = 0$ donc $f \in F$. Par analyse/synthèse, on a montré que toute fonction continue f s'écrit comme la somme d'un élément de F et

d'un élément de G . De plus, d'après la phase d'analyse, on a montré que cette écriture est unique ce qui montre l'inclusion $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset F \oplus G$ d'où l'égalité.

Correction 12 Soit P un élément de l'intersection. Alors $P = \lambda(X^3 + 2)$ et $P'(1) = 0$. On a $P'(1) = 3\lambda$ donc $\lambda = 0$ et $P = 0$. L'inclusion $\{0\} \subset F$ étant toujours vraie, la somme est bien directe.

Correction 13

1. On se donne une fonction h quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Que faut-il lui soustraire pour qu'elle appartienne à F ? Il est clair que $x \mapsto h(x) - (h(0) + h'(0))$ appartient à F . Si on pose G l'ensemble des fonctions constantes, on vient de montrer que tout élément h de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$h = \underbrace{h - (h(0) + h'(0))}_{\in F} + \underbrace{(h(0) + h'(0))}_{\in G},$$

ce qui montre l'égalité $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = F + G$. Comme il est clair que F et G sont en somme directe (ils n'ont que la fonction nulle en commun et l'autre inclusion étant toujours vraie, on a bien $F \cap G = \{0\}$), G est bien un supplémentaire de F dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2. On peut prendre $H = \text{Vect}(x \mapsto x^2 + 1)$. Notons $c : x \mapsto x^2$. Soit une fonction h quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors

$$h = \underbrace{h - (h(0) + h'(0))}_{\in F} + \underbrace{(h(0) + h'(0))}_{\in G},$$

donc

$$h = \underbrace{h - (h(0) + h'(0))}_{\in F} - \underbrace{(h(0) + h'(0))c}_{\in H} + \underbrace{(h(0) + h'(0))(1 + c)}_{\in H},$$

car $h - (h(0) + h'(0)) - (h(0) + h'(0))c$ est un élément de F en tant que CL d'éléments de F . Par ailleurs, la somme est directe car si une fonction est de la forme $\lambda(c + 1)$ et qu'elle appartient à F , alors $\lambda = 0$ donc c'est la fonction nulle.

Correction 14 Notons F l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_3 = 0$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque, alors :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \underbrace{(u_n - u_3)_{n \in \mathbb{N}}}_{\in F} + (u_3)_{n \in \mathbb{N}}.$$

On a montré que toute suite s'écrit comme la somme d'un élément de F et un élément de l'ensemble G des suites constantes. Il est clair que l'ensemble des suites constantes est

en somme directe avec F (ils n'ont que la suite nulle en commun et l'autre inclusion étant toujours vraie, on a bien $F \cap G = \{0\}$) donc c'est un supplémentaire de F dans l'ensemble des suites.

Correction 15 On remarque tout d'abord que $A \in F$ ce qui montre que F est non vide. Soient maintenant $(P_1, P_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors A divise P_1 donc λP_1 et A divise P_2 . On en déduit que A divise $\lambda P_1 + P_2$ donc $\lambda P_1 + P_2 \in F$ ce qui montre que F est stable par combinaison linéaire. On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}[X]$ alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $\deg(R) < 2$ tel que :

$$P = AQ + R.$$

Le polynôme AQ est un élément de F , on donc montré qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. On en déduit que $\mathbb{R}_2[X]$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction 16

1. Le polynôme nul admet α pour racine, l'ensemble F_α est donc non vide. Soient $(P, Q) \in F_\alpha^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $(\lambda P + Q) \in F_\alpha$. On sait que P et Q admettent α pour racine, on doit montrer que le polynôme $\lambda P + Q$ s'annule en α ce qui est clair. L'ensemble F_α est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Si $\alpha = \beta$, alors $F_\alpha = F_\beta = \mathcal{F}_\alpha \cap F_\beta$. Si $\alpha \neq \beta$, on raisonne par équivalence. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors :

$$P \in F_\alpha \cap F_\beta \Leftrightarrow P(\alpha) = P(\beta) = 0 \Leftrightarrow (X - \alpha)(X - \beta) \text{ divise } P.$$

Par équivalence, on a montré que $F_\alpha \cap F_\beta$ est l'ensemble des polynômes divisible par $(X - \alpha)(X - \beta)$.

Correction 17 On remarque tout d'abord que la fonction nulle s'écrit $x \mapsto ax \ln(x) + b \ln(x)$ avec $a = 0 = b$ donc elle appartient à F qui est donc non vide.

Soient maintenant f, g deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition de F , on sait qu'il existe $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$f : x \mapsto ax \ln(x) + b \ln(x) \text{ et } g : x \mapsto a'x \ln(x) + b' \ln(x).$$

On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f + g)(x) = \lambda(ax \ln(x) + b \ln(x)) + a'x \ln(x) + b' \ln(x) = (\lambda a + a')x \ln(x) + (\lambda b + b') \ln(x).$$

Comme $(\lambda a + a')$ et $(\lambda b + b')$ sont deux réels, $\lambda f + g$ est bien de la forme souhaitée donc elle appartient à F . Ce dernier est bien un sous-espace vectoriel de E .

Correction 18

Analyse : Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $(f, g) \in F \times G$, $h = f + g$. Il existe alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax^2 + bx + c$ d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) + ax^2 + bx + c.$$

On a :

- $h(0) = f(0) + c = c$ car $f(0) = 0$.
- $h'(0) = f'(0) + b = b$ car $f'(0) = 0$ et
- $h(1) = f(1) + a + b + c = a + b + c$ car $f(1) = 0$.

On en déduit que $a = h(1) - h(0) - h'(0)$, $b = h'(0)$ et $c = h(0)$.

Synthèse : Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Posons $a = h(1) - h(0) - h'(0)$, $b = h'(0)$, $c = h(0)$, $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et $f = h - g$. Montrons que :

- $f \in F$,
- $g \in G$ et
- $f + g = h$.

Les deux derniers points sont clairs. En utilisant la phase d'analyse, on montre facilement que $f(0) = 0 = f'(0) = f(1)$ donc $f \in F$. On a montré que tout élément de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G . De plus, l'unicité de l'écriture a été montrée dans la phase d'analyse. Ainsi, on a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset F \oplus G$ d'où l'égalité.

Correction 19 On raisonne par analyse/synthèse.

Analyse : Soit $f \in \mathcal{C}(R)$. Supposons qu'il existe (g, h) telles que $f = \alpha + h$ avec α constante

et $\int_0^1 h(t) dt = 0$.

Intégrons l'égalité $f = \alpha + h$ entre 0 et 1. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 \alpha dt + \int_0^1 h(t) dt \\ &= \alpha \text{ car } \int_0^1 h(t) dt = 0 \end{aligned}$$

On a donc $\alpha = \int_0^1 f(t) dt$.

Synthèse : Soit $f \in \mathcal{C}(R)$. Posons $\alpha = \int_0^1 f(t) dt$ et $h = f - \alpha$. On a alors

- α est une fonction constante,

- $\int_0^1 h(t) dt = \int_0^1 (f(t) - \alpha) dt = 0$ par linéarité de l'intégrale.
- $f = \alpha + h$ par définition de h .

On a montré que toute fonction continue s'écrit comme la somme d'une fonction constante et d'une fonction dont l'intégrale entre 0 et 1 est nulle. L'unicité de l'écriture a été montrée dans la phase d'analyse. Les deux espaces sont bien supplémentaires dans $\mathcal{C}(R)$.

Correction 20 On se donne une fonction h quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Il est clair que $x \mapsto h(x) - (h(0))$ s'annule en 0 et la dérivée de $x \mapsto h(x) - xh'(0)$ s'annule en 0. Ainsi, la fonction $x \mapsto h(x) - h(0) - xh'(0)$ appartient à F . Si on pose G l'ensemble des fonctions affines, on vient de montrer que tout élément h de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$h = \underbrace{h - (h(0) + h'(0))}_{\in F} + \underbrace{(h(0) + xh'(0))}_{\in G},$$

ce qui montre l'égalité $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = F + G$. Montrons que F et G sont en somme directe. Soit donc $f \in F \cap G$. Alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = ax + b$. On a, de plus, $f(0) = 0 = b$ et $f'(0) = 0 = a$ d'où $f = 0$. L'autre inclusion étant toujours vraie, on a bien $F \cap G = \{0\}$. La somme est directe, ainsi G est bien un supplémentaire de F dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Correction 21 On remarque que les polynômes constants ne fonctionnent pas. On essaie alors les polynômes de $\text{Vect}(X)$: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P = P - (P(2) - P(1))X + (P(2) - P(1))X$. On a donc $\mathbb{R}[X] \subset F + \text{Vect}(X)$ d'où l'égalité car F et $\text{Vect}(X)$ sont deux ssev de $\mathbb{R}[X]$. Par ailleurs, la somme est directe car si $P = \lambda X$ et $P(1) = P(2)$, alors $\lambda = 0$ donc $P = 0$. La somme est bien directe. On en déduit que $\text{Vect}(X)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction 22 Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que la fonction $\sum_{k=1}^4 \lambda_k f_k$ soit nulle. Montrons que tous ces réels sont nuls.

On pose $g(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kx)$. Cette fonction étant nulle, on a :

$$g(0) = g(\pi) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Les égalités précédentes donnent le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 & +\lambda_2 & -\lambda_3 & +\lambda_4 & = & 0 \\ & -\lambda_2 & & +\lambda_4 & = & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 & -\frac{1}{2}\lambda_2 & -\lambda_3 & -\frac{1}{2}\lambda_4 & = & 0 \end{cases}$$

On fait $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_1$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ donc la famille est libre.

Correction 23 La famille est à degrés échelonnés donc elle est libre.

Correction 24

1. On a l'inclusion $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. En effet, si $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$, alors $x = a + b$ avec $a \in (F \cap G)$ et $b \in (F \cap H)$. On a $a \in G$ et $b \in H$ donc $a + b \in G + H$. On a également $a \in F$ et $b \in F$ et comme F est un ssev, $a + b \in F$ d'où l'inclusion.

Remarque : l'inclusion est stricte. Prenons par exemple $F = \text{Vect}(1+X)$, $G = \text{Vect}(1)$, $H = \text{Vect}(X)$. Alors $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ mais $G + H = \mathbb{R}_1[X]$ donc $F \cap (G + H) = F$.

2. On a l'inclusion $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$. En effet, si $x \in F + (G \cap H)$, alors $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G \cap H$. On a $b \in G$ donc $a + b \in F + G$. On a également $b \in H$ donc $a + b \in F + H$ d'où l'inclusion.

Remarque : l'inclusion est stricte. On reprend le même exemple, on a $F \cap (G + H) = F = \text{Vect}(1+X)$, $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ donc $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0\}$.

3. On applique la première inclusion à F, G et $F \cap H$. On obtient :

$$(F \cap G) + (F \cap (F \cap H)) \subset F \cap (G + F \cap H),$$

donc

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + F \cap H).$$

On montre ensuite directement la deuxième inclusion. Soit $x \in F \cap (G + F \cap H)$, alors $x = a + b$ avec $x \in F$, $a \in G$ et $b \in F \cap H$. On a $a = x - b \in F$ car F est un ssev donc $a \in F \cap G$. On en déduit que $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$. On a bien l'égalité

Correction 25 Soit $f \in E$, on note L_i les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(a_1, \dots, a_p)$, $\tilde{L}_i$ leurs fonctions polynomiales associées et G les fonctions polynomiales de degré au plus $p-1$, alors

$$f = \underbrace{f - \sum_{i=1}^p f(a_i) L_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=1}^p f(a_i) \tilde{L}_i}_{\in G}.$$

Par ailleurs, si une fonction polynomiale de degré au plus $p-1$ s'annule en p points distincts, elle est nulle. Par conséquent, la somme est directe et G est bien un supplémentaire de F dans E .

Correction 26

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On veut montrer qu'il existe un unique $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{i=0}^n \lambda_i T_i.$$

En identifiant les coefficients, comme chaque T_i est de degré i , on obtient un système triangulaire à $n+1$ inconnues et $n+1$ équations avec des pivots non nuls donc il possède une unique solution. Ainsi, chaque élément de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire des T_i ce qui montre que $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a $f_k = T_k(\cos)$ avec T_k de degré k , donc f_k est une combinaison linéaire des $(g_0, \dots, g_k)$. On a donc, pour tout k , $f_k \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$ d'où l'inclusion $\text{Vect}(f_0, \dots, f_n) \subset \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$.

Soit maintenant $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On sait qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique tel que

$$X^k = \sum_{j=0}^n \lambda_j T_j,$$

car $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^k(x) = \sum_{j=0}^n \lambda_j T_j(\cos x) = \sum_{j=0}^n \lambda_j \cos(jx)$. Autrement dit, $g_k = \sum_{j=0}^n \lambda_j f_j$, ce qui montre l'autre inclusion.