

TD 17 : Intégration.

1 Manipulation

Exercice 1.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$.

1. Montrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.
2. En déduire le calcul de $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2 x} dx$.

Exercice 2.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f(0) = 1$ et $f \leq f' \leq 2f$. Encadrer $f(-1)$ et $f(1)$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. On suppose que $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt$ est constante. Montrer que f est périodique.

Exercice 4.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.
2. On suppose désormais $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

2 Stricte positivité

Exercice 5.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\left| \int_0^1 f(t) dt \right| = \int_0^1 |f(t)| dt \Leftrightarrow f \text{ est de signe constant.}$$

Exercice 6.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7.

On cherche les fonctions $f \in C^0([0, 1])$ telle que

$$\int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 f^3(t) dt = \int_0^1 f^4(t) dt. (\star)$$

1. Supposons f une telle fonction, Calculer $\int_0^1 (f^2(t) - f(t))^2 dt$.
2. En déduire l'ensemble des fonctions continues vérifiant $(\star)$

3 Sommes de Riemann

Exercice 8.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{-k/n}}$.

Exercice 9.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$.

Exercice 10.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$.

4 Fonction définie par une intégrale

Exercice 11.

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \\ x & \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \end{cases} \mathbb{R}$.

1. Montrer que g est impaire.
2. Calculer sa dérivée.
3. Déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice 12.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie $\varphi(t) = \frac{\text{sh } t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$. On pose $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f .
2. Déterminer le signe de f
3. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variations de f et retrouver son signe.

Exercice 13.

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t) g(t) dt.$$

1. Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)dt$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
3. Résoudre cette équation différentielle.

5 Inégalité de Taylor Lagrange

Exercice 14.

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 15.

Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Exercice 16.

Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Montrer que pour tout $x \in [-a, a]$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2a} |f(a) - f(-a)| + \frac{a^2 + x^2}{2a} \sup_{x \in [-a, a]} |f''(t)|.$$

6 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 17.

On pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x t^n e^{-t} dt. \end{cases}$

1. Calculer $f_0(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x)$.
2. Établir une relation de récurrence entre f_n et f_{n+1} .
3. Montrer que f_n admet une limite en $+\infty$. On la note l_n .
4. Montrer que $l_n = n!$.

Exercice 18.

Déterminer un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt$.

Exercice 19.

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$. Montrer, en majorant I_n , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 20.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$$

Exercice 21.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(x) dx = 0$. On note M et m son maximum et son minimum. Montrer que $\int_0^1 f^2(t) dt \leq -mM$.

Exercice 22.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. Établir une relation liant I_n et I_{n+1} .
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \frac{e}{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ puis un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 = a$, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$. On suppose $a \neq I_0$. Montrer, en étudiant $D_n := |u_n - I_n|$ que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$.

Exercice 23.

1. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $g \geq 0$ et non identiquement nulle. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^\alpha f(t) dt$ où f est une fonction continue à droite en 0 et α est un réel différent de -1.

Exercice 24.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n}$

Exercice 25.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$.

Exercice 26.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 27.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \end{cases}$.

1. Déterminer le signe de $x \mapsto f(x) - \ln(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec ses limites.

Exercice 28.

Soit :

$$F: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt. \end{cases}$$

1. Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

On pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

3. Exprimer F à l'aide de g .

4. En déduire que F peut être prolongée par continuité en 0.

Exercice 29.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. On pose :

$$G: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \int_x^{2x} f(t) dt \end{cases}.$$

1. Montrer que G est de classe C^1 et donner la dérivée de G pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$.

7 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 30.**

Soit f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(t) = t \ln(t)$.

1. Étudier rapidement la fonction f .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$.

2. Montrer que $\int_1^n f(t) dt \leq S_n \leq \int_1^n f(t) dt + n \ln(n)$.

3. Calculer $\int_1^n f(t) dt$.

4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\prod_{k=1}^n k^k \right)^{4/n^2}$.

Exercice 31. ✨ ✨

Soit f une fonction continue positive sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n}$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Exercice 32. ✨ ✨

Soit f continue sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_a^b t^k f(t) dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a, b[$.

Exercice 33.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ quand n tend vers $+\infty$, en utilisant les sommes de Riemann.

Exercice 34. ✨ ✨

Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq k \int_0^x f(t) dt$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 35. ✨ ✨

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On définit F sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$.

Exercice 36. ✨ ✨

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \sin(xt) e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, |\sin(u+\alpha) - \sin(u) - \alpha \cos(u)| \leq \frac{1}{2} \alpha^2$.

2. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^1 t \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

Exercice 37. ✨ ✨ ✨

Inégalité de Kolmogorov Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées et on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad ; \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

1. (a) Soient $x, h \in \mathbb{R}$ avec $h > 0$. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x+h$.

(b) Montrer alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h > 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

(c) En déduire que f' est bornée.

On peut donc poser :

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|.$$

2. En utilisant la question 1.(b), établir l'inégalité :

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Memo

- Comment calculer la limite d'une intégrale?
 - L'encadrer/la majorer/la minorer
 - Utiliser une relation de récurrence
 - Faire une IPP ou un changement de variable avant de la majorer/minorer/encadrer
- Comment reconnaître une somme de Riemann et calculer sa limite?
Faire apparaître une fonction en k/n
- Comment étudier une fonction définie par une intégrale?
 - Utiliser le cours pour sa continuité/dérivabilité
 - Appliquer le théorème des accroissements finis
 - Encadrer l'intégrale