

Devoir d'entraînement 7.

Exercice 1 (sujet 1). On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure d'espace vectoriel usuelle.

1. On considère le sous-espace vectoriel F de E engendré par la famille (v_1, v_2, v_3) où :

$$v_1 = (1, 3, -1, 0), \quad v_2 = (5, 4, -2, 1), \quad v_3 = (-13, 5, 1, -4).$$

- (a) Montrer que v_3 peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et de v_2 .
- (b) En déduire une base de F .

2. On considère le sous-espace vectoriel G de E engendré par la famille (u_1, u_2) , où :

$$u_1 = (-1, 1, 1, 0), \quad u_2 = (0, 0, 1, 1).$$

- (a) Montrer que (v_1, v_2, u_1, u_2) est une base de E .
- (b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. Soit H le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 - x_2 + 7x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

- (a) Déterminer une base de H .
- (b) Montrer que $v_1 \in H$ et $v_2 \notin H$.

Exercice 2 (sujet 1). On pose : $A = (X + 1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'on peut écrire $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0 .
2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ seront mises sous la forme $\rho_k e^{i\alpha_k}$ avec $(\rho_k, \alpha_k) \in \mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la somme des racines de A et vérifier la cohérence du résultat avec les coefficients de A .

On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

4. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

5. Calculer de deux façons : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.
6. En déduire Q_n et enfin, P_n .

Exercice 3 (sujet 2). pour tout entier naturel non nul n , on pose $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k}$

Dans les questions 1) et 2), n est un entier naturel non nul fixé.

1. Soit A le polynôme tel que $A(X^2) = P_n(X)$. On note $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ la liste des racines de A comptées avec multiplicité dans A .

(a) Donnez la forme développée de A (sous forme de somme).

(b) Exprimez en fonction de n la somme et le produit des $(z_k)_{1 \leq k \leq n-1}$.

(c) Quel est un lien simple entre les racines de A et celles de P_n ?

2. (a) Vérifiez que :

$$P_n'' + P_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2}$$

(b) Déduisez-en que les racines de P_n sont de multiplicité 1 ou 2.

(c) Montrez que P_n a au moins $n-1$ racines distinctes complexes.

3. Soit u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$$

(a) Vérifiez que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

(b) Déduisez-en que u est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^n}{n!e^n} \leq \frac{1}{e}$

4. On fixe de nouveau un entier naturel non nul n .

(a) Vérifiez que :

$$P_n = \sum_{j=0}^{2n-2} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j$$

(b) Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, on peut en déduire que (vous l'admettez) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - \cos(x)| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Déduisez-en que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{2n}{e}\right], |P_n(x) - \cos(x)| \leq 1/e$$

(c) Déduisez-en que pour tout entier k dans $[0, 2n/(e\pi)]$, $P_n(k\pi)$ est du signe de $(-1)^k$ et qu'il est non nul.

(d) Montrez enfin que P_n a au moins $2 \left\lfloor \frac{2n}{e\pi} \right\rfloor$ racines distinctes réelles, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t .

5. Soit k un entier naturel fixé et $I_k = [k\pi, (k+1)\pi]$.

(a) Montrez que, pour n assez grand, P_n admet au moins une racine dans I_k , que l'on notera x_n .

(b) Montrez que : $\cos(x_n) \rightarrow 0$ en utilisant l'inégalité donnée plus haut.

(c) Vérifiez que :

$$\forall x \in I_k, x = \arccos((-1)^k \cos(x)) + k\pi$$

(d) Déduisez-en que $x_n \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 (sujet 1 et 2). Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a \neq b$.

On considère deux urnes U et V composées ainsi :

- l'urne U contient b boules blanches et a boules noires ;
- l'urne V contient a boules blanches et b boules noires.

On se propose d'étudier une succession de tirages au hasard d'une boule dans ces deux urnes. *Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne dont elle provient.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note

- U_n : « le n -ième tirage a lieu dans l'urne U » ;
- B_n : « le n -ième tirage donne une boule blanche ».

On étudie deux protocoles différents dans les parties **I** et **II** puis on compare les résultats dans la partie **III**.

Partie I.— Le premier tirage a lieu dans l'urne U . Ensuite :

- si un tirage a donné une boule blanche, alors le tirage suivant a lieu dans l'urne U ;
- si un tirage a donné une boule noire, alors le tirage suivant a lieu dans l'urne V .

1. Calculer $P(B_1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche pour la première fois au tirage numéro n .
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(B_{n+1}) = \frac{b-a}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}$.
(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $P(B_n)$ en fonction de a , b et n .
(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$.

Partie II.— Le premier tirage a lieu dans l'urne U . Ensuite :

- si un tirage a donné une boule blanche, alors le tirage suivant a lieu dans la même urne ;
- si un tirage a donné une boule noire, alors le tirage suivant a lieu dans l'autre urne.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n , $\overline{U_n}$, B_n et $\overline{B_n}$.
2. En déduire que $P(U_{n+1}) = \frac{b}{a+b}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer alors $P(B_n)$ pour tout $n \geq 2$.

Partie III.— L'objectif est d'obtenir une boule blanche au dernier tirage.

1. Montrer que les deux protocoles sont équivalents si $n = 2$.
2. Quel est le protocole le plus favorable si $b > a$?
3. Le résultat reste-t-il vrai dans le cas général ?

Correction du DS n 7

Correction 1

1. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ où :

$$v_1 = (1, 3, -1, 0), \quad v_2 = (5, 4, -2, 1), \quad v_3 = (-13, 5, 1, -4)$$

- (a) Montrons que v_3 peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 , c'est-à-dire sous la forme : $v_3 = a.v_1 + b.v_2$. Cette équation vectorielle est équivalente à un système obtenu en identifiant les coordonnées des deux membres de l'équation. On peut aussi remarquer que : Comme v_1 a sa quatrième coordonnée nulle, il apparaît nécessaire que $b = -4$. Mais on a alors : $v_3 - b.v_2 = (-13, 5, 1, -4) + 4.(5, 4, -2, 1) = (7, 21, -7, 0) = 7.(1, 3, -1, 0)$, ie : $v_3 = 7.v_1 - 4.v_2$.

- (b) On a alors : $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ puisque v_3 s'écrit comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 .

Or v_1 et v_2 forment une famille libre : en effet, soient λ_1 et λ_2 deux réels tels que :

$$\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff (\lambda_1 + 5\lambda_2, 3\lambda_1 + 4\lambda_2, -\lambda_1 - 2\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Comme l'égalité : $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ fait de (v_1, v_2) une famille génératrice de F , et puisqu'elle est libre : (v_1, v_2) est une base de F .

2. Soit $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où : $u_1 = (-1, 1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1, 1)$.

- (a) Montrons que (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de E :

Montrons tout d'abord que cette famille est libre : Soient alors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre réels tels que :

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.v_1 + \lambda_4.v_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

On est ramené à résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_1 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_2 \\ -3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & L_3 \\ 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 & L_4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_1 \\ -11\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 5\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow -L_3 + L_4 \\ 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 & L_4 \end{cases}$$

Les lignes L_2 et L_3 impliquent $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la ligne L_4 donne alors $\lambda_4 = 0$ puis la première donne $\lambda_1 = 0$. La seule solution est donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

La famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est donc libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

On montre ensuite qu'elle est génératrice de $\mathbb{R}^4$ en raisonnant avec l'espace engendré :

$$\begin{aligned}
& \text{vect}((1, 3, -1, 0), (5, 4, -2, 1), (-1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)) \\
&= \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (0, 9, 2, 0), (-1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)) \quad v_1 \leftarrow \frac{1}{4}(v_1 + v_3), v_2 \leftarrow v_2 + 5v_3 - v_4 \\
&= \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1)) \quad v_2 \leftarrow \frac{1}{2}(v_2 - 9v_1), v_3 \leftarrow v_1 - v_3 \\
&= \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)) \quad v_3 \leftarrow v_3 + v_2, v_4 \leftarrow v_4 - v_2 \\
&= \mathbb{R}^4
\end{aligned}$$

On a bien montré que la famille est génératrice de $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

On peut aussi montrer que tout élément de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire de la famille. Il suffit pour cela de montrer que le système

$$\begin{cases} x + 3y - z &= a \\ 5x + 4y - 2z + t &= b \\ -x + y + z &= c \\ z + t &= d \end{cases}$$

admet une unique solution. On écrit

$$\begin{cases} x + 3y - z &= a \\ 5x + 4y - 2z + t &= b \\ 4y &= a + c \\ 5x + 4y - 3z &= b - d \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1, L_4 \leftarrow L_2 - L_4$$

$$\begin{cases} x - z + 3y &= a \\ 5x - 2z + t + 4y &= b \\ 4y &= a + c \\ 2z - 11y &= b - d - 5a \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4$$

puis en permutant les lignes :

$$\begin{cases} 5x - 2z + t + 4y &= b \\ x - z + 3y &= a \\ 2z - 11y &= b - d - 5a \\ 4y &= a + c \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4$$

On reconnaît un système de Cramer, il admet donc une unique solution. On en déduit que la famille est une base de $\mathbb{R}^4$.

- (b) $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E (somme de s.e.v. de E).

On a vu que (v_1, v_2) est une base de F . On a aussi : $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$, donc la famille (u_1, u_2) engendre G . Mais elle est aussi libre comme sous-famille de la base (u_1, u_2, v_1, v_2) de E : (u_1, u_2) est donc une base de G .

Comme la famille (u_1, u_2, v_1, v_2) , obtenue en juxtaposant une base de F et une base de G , forme une base de l'espace E tout entier : d'après le cours, on peut alors affirmer que :

$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires : } F \oplus G = E$

- (c) On cherche $p(7, 10, -3, 2)$, on cherche donc $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$(7, 10, -3, 2) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma u_1 + \delta u_2,$$

soit encore

$$(7, 10, -3, 2) = \alpha(1, 3, -1, 0) + \beta(5, 4, -2, 1) + \gamma(-1, 1, 1, 0) + \delta(0, 0, 1, 1).$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta - \gamma &= 7 \\ 3\alpha + 4\beta + \gamma &= 10 \\ -\alpha - 2\beta + \gamma + \delta &= 3 \\ \beta + \delta &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 5\beta - \gamma &= 7 \\ 4\alpha + 9\beta &= 17L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3\beta + \delta &= 4L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ \beta + \delta &= 2 \end{cases}$$

On déduit des deux dernières lignes que $\beta = 1$ puis la première ligne donne $4\alpha = 8$ donc $\alpha = 2$ d'où $p(7, 10, -3, 2) = 2v_1 + v_2 = (7, 10, -4, 1)$

3. $H = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 - x_2 + 7x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}$.

(a) Pour trouver une famille génératrice, on résout le système caractéristique des éléments de H :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 4x_1 + 4x_3 + 5x_4 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 - 4x_3 + 2x_4 = -3x_3 + \frac{13}{4}x_4 \\ x_1 = -x_3 - \frac{5}{4}x_4 \end{cases} \\ &H = \mathcal{S} = \{(-x_3 - \frac{5}{4}x_4, -3x_3 + \frac{13}{4}x_4, x_3, x_4) \mid (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\} \\ &\Leftrightarrow H = \text{Vect}((-1, -3, 1, 0), (-\frac{5}{4}, \frac{13}{4}, 0, 1)) \\ &\Leftrightarrow H = \text{Vect}((1, 3, -1, 0), (-5, 13, 0, 4)). \end{aligned}$$

Ces deux derniers vecteurs qui engendrent H sont clairement non colinéaires, donc ils forment une famille libre.

On obtient ainsi une base (parmi tant d'autres possibles!) de H .

(b) On vient d'écrire que $v_1 = (1, 3, -1, 0)$ appartient à une base de H : donc $v_1 \in H$!

$v_2 \in H$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système caractéristique des éléments de H .

Avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, 4, -2, 1) = v_2$, on a :

$3x_1 - x_2 + 7x_4 = 3 \cdot 5 - 4 + 7 = 18 \neq 0$, donc $v_2 \notin H$.

Correction 2

1. D'après la formule du binôme de Newton, on a $A = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = XB$ avec $B = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1}$. Le polynôme B est de degré $2n-1$, son coefficient dominant est $C_{2n}^{2n} = 1$ et son terme constant b_0 vaut $C_{2n}^1 = 2n$.

2. z est racine de A si et seulement si $(z+1)^{2n} = 1$ ce qui équivaut à $z+1 = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)$ où k est un entier compris entre 1 et $2n-1$.

Donc les racines de A sont $z_0 = 0$ et $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1$ avec k est un entier compris entre 1 et $2n-1$.

Remarquons que pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$:

$$\begin{aligned} z_k &= \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) \left(\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right) \right) \\ &= 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \exp\left(\frac{ik\pi}{2n} + i\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

3. On a $\sum_{k=0}^{2n-1} z_k = \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1 \right) = 0 - 2n$. car la somme des racines $2n$ ième de l'unité est nulle.

Par ailleurs, A est unitaire et le coefficient de son terme d'indice $2n-1$ vaut $\binom{2n}{2n-1} = 2n$. Le résultat est donc bien cohérent.

4. Faisons dans P_n le changement d'indice $l = 2n - k$. Alors :

$$P_n = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-l)\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{l\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{l\pi}{2n}\right)$$

car $\sin(\pi - x) = \sin x$.

On en déduit que $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n^2$.

De plus, pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$, $\frac{k\pi}{2n}$ appartient à $[0, \pi]$ donc $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \geq 0$ ce qui implique que P_n et Q_n sont positifs. Par conséquent, $P_n = \sqrt{Q_n}$.

L'immense majorité d'entre vous a posé $j = n + k$ pour que ça colle au niveau des bornes. Ensuite, il y a eu ceux qui m'ont trafiqué le produit avec des formules trigo fausses pour que ça marche et quelques uns (rares) qui ont eu l'honnêteté de reconnaître que ce changement d'indice faisait apparaître des cosinus dans le produit.

5. $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ est le produit des racines du polynôme B . D'après les relations coefficients racines, ce

produit vaut $(-1)^{2n-1} b_0$. Donc $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$. D'autre part, d'après l'expression des z_k donnée au

2. :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= (2i)^{2n-1} \times Q_n \prod_{k=1}^{2n-1} \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) \\ &= \frac{2^{2n-1} (-1)^n Q_n}{i} \exp\left(\frac{i\pi}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} k\right) \\ &= \frac{2^{2n-1} (-1)^n Q_n}{i} \exp\left(i\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= -2^{2n-1} Q_n \end{aligned}$$

En égalant les deux résultats, on trouve $Q_n = \frac{4n}{2^{2n}}$ et $P_n = \sqrt{Q_n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Correction 3

$$1. (a) P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (X^2)^k = A(X^2) \text{ où } A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^k.$$

$$(b) \text{ On note } A(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k. \text{ On a } a_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \neq 0 \text{ donc } A \text{ est de degré } n-1.$$

D'après le cours,

$$\sum_{k=1}^{n-1} z_k = -\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{\frac{(-1)^{n-2}}{(2n-4)!}}{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}} = \frac{(2n-2)!}{(2n-4)!} = (2n-2)(2n-3)$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} z_k = (-1)^{n-1} \frac{a_0}{a_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1}{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}} = (2n-2)!$$

$$\text{Conclusion : } \sum_{k=1}^{n-1} z_k = (2n-2)(2n-3) \text{ et } \prod_{k=1}^{n-1} z_k = (2n-2)!$$

Le degré du polynôme A est n-1 et non pas n ! Par ailleurs, beaucoup d'erreurs dans la simplification de $\frac{(2n-2)!}{(2n-4)!}$.

$$(c) \text{ Soit } z \in \mathbb{C}, \text{ on a } A(z^2) = P(z) \text{ donc}$$

$$z \text{ racine de } P \Leftrightarrow P(z) = 0 \Leftrightarrow A(z^2) = 0 \Leftrightarrow z^2 \text{ racine de } A$$

Conclusion : les racines de A sont les carrés des racines de P.

Le symbole $\sqrt{}$ est réservé à la racine carrée positive d'un RÉEL POSITIF!!!!!! c'est inadmissible de voir ce symbole utilisé sur des complexes (et pareil pour la puissance 1/2).

2. (a)

$$\begin{aligned} P_n''(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (X^{2k})'' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2k(2k-1) X^{2k-2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k-2)!} X^{2k-2} \text{ car le terme pour } k=0 \text{ est nul} \end{aligned}$$

Posons $j = k-1$, alors

$$\begin{aligned} P_n'' &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j)!} X^{2j} \\ &= - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j}{(2j)!} X^{2j} \\ &= - \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{(2j)!} X^{2j} - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2} \right] \\ &= - \left[P_n - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } P_n'' + P_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2}.$$

(b) Si z est racine de P de multiplicité $m \geq 3$ alors $P_n(z) = P_n'(z) = P_n''(z) = 0$. D'après a), on a

$$P_n(z) + P_n''(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} z^{2n-1}$$

donc $z^{2n-2} = 0$. C'est impossible si $n = 1$ et cela donne $z = 0$ si $n \geq 2$. Mais 0 n'est pas racine de P_n puisque $P_n(0) = 1$.

Conclusion : les racines de P_n sont soit simple, soit double.

Beaucoup d'arnaques sur cette question car vous avez souvent fait démarrer la somme de la dérivée seconde à 2 (alors que le terme d'indice 1 ne s'annule pas!) et vous avez ensuite ramé pour justifier la formule. Sachez qu'il est, dans ce cas, appréciable de dire "je ne comprends pas pourquoi il reste un 1" plutôt que "je tente de faire disparaître le 1 d'une ligne à la suivante en espérant qu'elle ne le remarquera pas".

- (c) Notons $x_1, \dots, x_r$ les r racines complexes distinctes de P_n , notons $m_1, \dots, m_r$ leur multiplicité respective dans P_n . On a $\deg(P_n) = \sum_{k=1}^r m_k$.

Or, d'après b), $\forall k \in [1, r], m_k \leq 2$ donc $\sum_{k=1}^r m_k \leq 2r$ d'où $r \geq \frac{1}{2} \deg(P_n) = \frac{1}{2}(2n-2) = n-1$.

Conclusion : P_n a au moins $n-1$ racines complexes distinctes.

Ceux qui ont compris ont souvent eu du mal à me l'expliquer correctement, en traitant notamment le cas de où toutes les racines sont doubles puis en expliquant vaguement que c'était le cas où on avait le moins de racines. J'ai rarement été convaincue.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + \frac{1}{n})^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n}))$ or, $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ par concavité de la fonction (ou par une brève étude de fonction) donc $\ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$ (car $\frac{1}{n} > -1$). Or $n \geq 0$ d'où $n \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq 1$. Enfin, $\exp$ est croissante donc $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

J'ose à peine l'écrire mais un nombre non négligeable a tenté une récurrence.

(b)

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ et

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!e^n} = \frac{(n+1)e \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

donc

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{e \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^n} \geq 1$$

d'après la question a) car $(1 + \frac{1}{n})^n > 0$. On a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ et $u_n > 0$ d'où $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \geq 1$. La suite u est décroissante.

De plus, $u_1 = \frac{1}{e}$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{e}$

4. (a) On sait que : $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(j)}(x) = \cos(x + j\frac{\pi}{2})$. Donc $\cos^{(j)}(0) = \cos(j\frac{\pi}{2})$.

— Si j est pair, $j = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(j)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

— Si j est impair, $j = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(j)}(0) = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$.

donc

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{2n-1} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j$$

On pose $j = 2k$, on a

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k} = P_n(X)$$

Là encore, l'explication était souvent douteuse pour justifier l'égalité. J'ai vu souvent "on pose $j = 2k$ " alors que j est quelconque (et donc le nouvel indice n'est pas entier!). Je passe là encore sur les $(-1)^{k/2}$ qui n'ont aucun sens si k est impair

(b) Soit $x \in \left[0, \frac{2n}{e\pi}\right]$, alors $x^{2n} \leq \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$ car $0 \leq x^2 \leq \left(\frac{2n}{e}\right)^2$.

$$|P_n(x) - \cos(x)| \leq \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}(2n)!} \leq \frac{1}{e}$$

d'après 3b).

(c) Soit k un entier dans $[0, \frac{2n}{e}]$ alors $k\pi \in [0, \frac{2n}{e}]$ donc, d'après b),

$$|P_n(k\pi) - \cos(k\pi)| \leq \frac{1}{e}$$

or $\cos(k\pi) = (-1)^k$ d'où $-\frac{1}{e} \leq P_n(k\pi) - (-1)^k \leq \frac{1}{e}$ donc

$$-\frac{1}{e} + (-1)^k \leq P_n(k\pi) \leq \frac{1}{e} + (-1)^k$$

— Pour k pair, $0 < 1 - \frac{1}{e} \leq P_n(k\pi)$ donc $P_n(k\pi) > 0$.

— Pour k impair, $P_n(k\pi) \leq \frac{1}{e} - 1 < 0$ donc $P_n(k\pi) < 0$.

(d)

• On applique le théorème des valeurs intermédiaires à P_n (continue sur $\mathbb{R}$) sur chaque intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$ où $k \in [0, \frac{2n}{e\pi} - 1]$ (ce qui donne $E(\frac{2n}{e\pi} - 1) + 1 = E(\frac{2n}{e\pi})$ valeurs de k).

$P_n(k\pi)$ et $P_n((k+1)\pi)$ sont de signes opposés stricts d'après c) donc $\exists c_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $P_n(c_k) = 0$.

• On a donc trouvé $E(\frac{2n}{e\pi})$ racines distinctes pour P_n dans $\mathbb{R}_+^*$ (distinctes car les intervalles $]k\pi, (k+1)\pi[$ sont disjoints).

De plus, P_n est pair donc les opposés des c_k sont aussi racines. Cela fait $2E(\frac{2n}{e\pi})$, au moins, racines distinctes dans $\mathbb{R}$ pour P_n .

5. (a) On vient de voir que pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $k \in [0, \lfloor \frac{2n}{e\pi} \rfloor - 1]$, P_n a au moins une racine dans I_k . Or, pour n assez grand, $k \leq \lfloor \frac{2n}{e\pi} \rfloor - 1$ car $\frac{2n}{e\pi} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Donc, pour n assez grand, P_n a au moins une racine dans I_k .

(b) D'après 4b) et l'énoncé :

$$\text{Pour } n \text{ assez grand, } |P_n(x_n) - \cos(x_n)| \leq \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}.$$

Or, $P_n(x_n) = 0$ par définition et $x_n \in [0, (k+1)\pi]$ d'où $x_n^{2n} \in [0, ((k+1)\pi)^{2n}]$.

On a donc, pour n assez grand, $|\cos(x_n)| \leq \frac{((k+1)\pi)^{2n}}{(2n)!}$. Or k est fixé donc $((k+1)\pi)^{2n}$ est négligeable devant $(2n)!$ quand n tend vers $+\infty$. D'où, par encadrement, $|\cos(x_n)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ donc $\cos(x_n) \rightarrow 0$.

Il faut impérativement majorer x_n pour passer à la limite car la limite que vous connaissez est $\frac{a^n}{n!}$ avec a une constante! Par ailleurs, beaucoup m'ont dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ par croissances comparées ce qui est parfaitement faux. On l'a montré à la main en faisant une longue fraction.

(c) Soit $x \in I_k$, $x - k\pi \in [0, \pi]$ donc $x - k\pi = \arccos(\cos(x - k\pi))$ car $\arccos$ est la réciproque de la restriction de $\cos$ à $[0, \pi]$.

D'où $x - k\pi = \arccos((-1)^k \cos x)$ donc $x = k\pi + \arccos((-1)^k \cos x)$.

(d) D'après b), $(-1)^k \cos(x_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ or $\arccos(y) \rightarrow \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ quand y tend vers 0 ($\arccos$ est continue en 0).

Donc $\arccos((-1)^k \cos(x_n)) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, d'où, d'après c) et comme $x_n \in I_k$, pour n assez grand, $x_n \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Correction 4

1. Le premier tirage a lieu dans l'urne U qui contient b boules blanches et a boules noires. On a

donc
$$P(B_1) = \frac{b}{a+b}.$$

On évite de balancer la probabilité sans un minimum d'explication (comme le fait qu'on commence par un tirage dans l'urne U)

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons B l'événement « obtenir une boule blanche pour la première fois au tirage numéro n ».

— Si $n = 1$ on a $B = B_1$ et on a vu à la question précédente que
$$P(B_1) = \frac{b}{a+b}.$$

— On suppose désormais que $n \geq 2$. Compte tenu du protocole de tirage dans cette partie, tant qu'on tire une boule noire, le tirage suivant a lieu dans l'urne V .

On a alors

$$B = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n.$$

D'après la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n) \\ &= P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \times \cdots \times P_{\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}}}(B_n) \\ &= \frac{a}{a+b} \times \underbrace{\frac{b}{a+b} \times \cdots \times \frac{b}{a+b}}_{(n-2) \text{ termes}} \times \frac{a}{a+b} \\ &= \frac{a^2 b^{n-2}}{(a+b)^n}. \end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$P(B) = \frac{a^2 b^{n-2}}{(a+b)^n} \text{ si } n \geq 2.$$

On commence par écrire l'événement dont on cherche la probabilité (avec des intersections) puis on cite la formule que l'on utilise. Certains m'ont écrit que l'on recherchait une probabilité conditionnelle, ce qui est faux.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule $P(B_{n+1})$ avec la formule des probabilités totales appliquée au le système complet d'événements $(B_n, \overline{B_n})$. On obtient

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n}) \\ &= \frac{b}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}P(\overline{B_n}) \\ &\text{car si } B_n \text{ est réalisé, le tirage suivant a lieu dans l'urne } U, \text{ de même si } \overline{B_n} \text{ est réalisé.} \\ &= \frac{b}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}(1 - P(B_n)) \\ &= \frac{b-a}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}. \end{aligned}$$

Ainsi,
$$P(B_{n+1}) = \frac{b-a}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Là encore, on cite la formule utilisée et le SCE que l'on considère. Comme on veut $P(B_{n+1})$ en fonction de $P(B_n)$, c'est naturel de choisir $(B_n, \overline{B_n})$ comme SCE. Certains ont voulu raisonner avec $(U_{n+1}, \overline{U_{n+1}})$, ce qui est possible car $U_{n+1} = B_n$ avec ce protocole. En revanche, raisonner avec $(U_n, \overline{U_n})$ ne mène nulle part.

- (b) On cherche $c \in \mathbb{R}$ tel que $c = \frac{b-a}{a+b}c + \frac{a}{a+b}$ ce qui donne après calculs $c = \frac{1}{2}$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = b_n - \frac{1}{2}$ est donc géométrique de raison $\frac{b-a}{a+b}$ et de premier terme $v_1 = b_1 - \frac{1}{2} = \frac{b}{a+b} - \frac{1}{2} = \frac{b-a}{2(a+b)}$; on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v_1 \left(\frac{b-a}{a+b} \right)^{n-1} = \frac{b-a}{2(a+b)} \times \left(\frac{b-a}{a+b} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{a+b} \right)^n$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(B_n) = b_n = v_n + c = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{a+b} \right)^n + \frac{1}{2}.}$$

Donc vous saviez calculer le terme général d'une suite géométrique au DS5 et là vous ne savez plus? Globalement, vous avez trouvé $\frac{1}{2}$ mais beaucoup ont pris $P(B_1)$ pour premier terme de la suite géométrique $\left(P(B_n) - \frac{1}{2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ au lieu de $\frac{b}{a+b} - \frac{1}{2}$. Certains aussi ont mis une puissance n au lieu de $n-1$ alors que le premier terme est celui d'indice 1 (et pas 0).

- (c) On a $-1 < \frac{b-a}{a+b} < 1 \Leftrightarrow -(a+b) < b-a < a+b$ ce qui est vrai car a et b sont positifs. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-a}{a+b} \right)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \frac{1}{2}.}$

J'ai vu beaucoup de $\left(\frac{b-a}{a+b} \right)^n \rightarrow 0$ car $\frac{b-a}{a+b} < 1$ ce qui est faux (mais vraiment, pensez à $(-3)^n$).

Partie II.—

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement U_{n+1} se réalise si et seulement si le $(n+1)$ -ième tirage a lieu dans l'urne U , c'est-à-dire si et seulement si :
 - le n -ième tirage a eu lieu dans U et a donné une boule blanche;
 - OU le n -ième tirage a eu lieu dans V et a donné une boule noire.

Ainsi $\boxed{U_{n+1} = (U_n \cap B_n) \cup (\overline{U_n} \cap \overline{B_n}).}$

Un minimum d'explication est évidemment nécessaire.

- Les événements $(U_n \cap B_n)$ et $(\overline{U_n} \cap \overline{B_n})$ sont incompatibles donc

$$P(U_{n+1}) = P(U_n \cap B_n) + P(\overline{U_n} \cap \overline{B_n})$$

puis, avec la formule des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P_{U_n}(B_n)P(U_n) + P_{\overline{U_n}}(\overline{B_n})P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b}P(U_n) + \frac{b}{a+b}P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b}P(U_n) + \frac{b}{a+b}(1 - P(U_n)) \\ &= \frac{b}{a+b}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(U_{n+1}) = \frac{b}{a+b} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Là encore, on précise que les événements sont incompatibles (et on évite de parler de réunion disjointe, il y a un vocabulaire spécifique pour les probas, c'est celui-là que vous devez utiliser).

3. Soit n un entier ≥ 2 . On calcule $P(B_n)$ avec la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(U_n, \overline{U_n})$:

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P_{U_n}(B_n)P(U_n) + P_{\overline{U_n}}(B_n)P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b}P(U_n) + \frac{a}{a+b}P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b} \times \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} \left(1 - \frac{b}{a+b}\right) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(B_n) = \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Partie III.—

1. On calcule la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage dans les deux protocoles. Pour le premier,

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap \overline{B_1}) \text{ car } (B_1, \overline{B_1}) \text{ est un SCE} \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2) \text{ par la formule des probas totales} \\ &= \frac{a}{a+b} \times \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} \end{aligned}$$

On obtient bien la même probabilité qu'avec le deuxième protocole.

2. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} &> \frac{(b-a)^n}{2(a+b)^n} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2)(a+b)^{n-2} &> (b-a)^n + (a+b)^n \\ \Leftrightarrow (a+b)^{n-2}(2a^2 + 2b^2 - (a+b)^2) &> (b-a)^n \\ \Leftrightarrow (a+b)^{n-2}(a^2 - 2ab + b^2) &> (b-a)^n \\ \Leftrightarrow (a+b)^{n-2} &> (b-a)^{n-2} \text{ en divisant par } (b-a)^2 > 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie par croissance de $x \mapsto x^{n-2}$ sur $\mathbb{R}^+$, car $a+b > b-a > 0$. Par équivalence, on a montré que le deuxième protocole est plus favorable dans le cas où $b > a$.

On peut aussi montrer comme Arthur que si $b > a$, alors la suite arithmético-géométrique est décroissante donc majorée à partir de l'indice 2 par son terme d'indice 2 qui correspond à la probabilité avec le second protocole.

3. Dans le cas général, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_1(B_n) = \frac{1}{2}$, en notant P_1 la probabilité avec le premier protocole. Or

$$\frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) > (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 > 0$$

donc, par équivalence, $\frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} > \frac{1}{2}$. On en déduit que pour n grand, la probabilité avec le deuxième protocole sera plus favorable que celle avec le premier protocole.