

Devoir surveillé 7, sujet 1 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1. Une puce effectue des sauts aléatoires sur les trois sommets d'un triangle ABC . À chaque saut, elle peut soit sauter sur place, soit sauter vers un des deux autres sommets. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'événement « après le n -ième saut, la puce est au point A » et $a_n = P(A_n)$;
- B_n l'événement « après le n -ième saut, la puce est au point B » et $b_n = P(B_n)$;
- C_n l'événement « après le n -ième saut, la puce est au point C » et $c_n = P(C_n)$.

On notera que a_0 (respectivement b_0 , c_0) sont les probabilités pour que la puce se trouve en A (respectivement en B , en C) au début de l'expérience.

Si M et N sont deux points parmi A, B, C , on note p_{MN} la probabilité pour que le saut s'effectue de M vers N .

1. (a) Justifier soigneusement que $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, en justifiant soigneusement, que $a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n$. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
2. Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Dans cette question (et seulement dans cette question), on suppose que $p_{MN} = \alpha$ pour tous points $M, N \in \{A, B, C\}$ tels que $M \neq N$.
(a) Montrer que $p_{MM} = 1 - 2\alpha$ pour tout $M \in \{A, B, C\}$.
(b) Montrer que $a_{n+1} = (1 - 3\alpha)a_n + \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(c) En déduire une expression de a_n en fonction de n et de a_0 .
(d) Étudier la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Dans cette question, on suppose que $p_{AA} = 1$, $p_{BA} = p_{BB} = \frac{1}{2}$ et $p_{CA} = p_{CB} = p_{CC} = \frac{1}{3}$.
(a) Comment interpréter la condition $p_{AA} = 1$?
(b) Déterminer les valeurs p_{MN} manquantes.
(c) Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire une expression de c_n en fonction de n et de c_0 . Quelle est la limite de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
(d) Montrer que $b_{n+2} = \frac{5}{6}b_{n+1} - \frac{1}{6}b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
(e) Quelle est la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 2. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide des formules de Moivre, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n\theta)$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unique.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

4. Déterminer le terme dominant de P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P_{2m+1}(0) = (-1)^m$.

6. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P'_{2m}(0) = (-1)^{m+1}2m$

7. Déterminer $n - 1$ racines de P_n appartenant à $] -1, 1[$.

8. En déduire l'ensemble des racines de P_n puis sa factorisation.

9. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

10. On suppose $n = 2m + 1$.

(a) Montrer que $2^{2m} \prod_{k=1}^{2m} \cos \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) = (-1)^m$.

(b) Montrer, à l'aide d'un changement d'indice qui inverse l'ordre de sommation, que

$$\prod_{k=m+1}^{2m} \cos \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) = (-1)^m \prod_{k=1}^m \cos \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right).$$

(c) En déduire que $\frac{1}{2^m} = \prod_{k=1}^m \cos \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right)$.

11. On suppose $n = 2m$.

(a) Montrer que 0 est racine de P_{2m} .

(b) En déduire l'existence de $B_m \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_{2m} = XB_m$.

(c) Montrer que $B_m(0) = P'_{2m}(0)$.

(d) En déduire, en utilisant un raisonnement similaire au cas impair, que $\prod_{k=1}^{m-1} \cos \left(\frac{k\pi}{2m} \right) = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$.

Exercice 3. Soit a un entier naturel, et soit P_a la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P_a(t) = t^3 - (a^2 + 2a)t + 2$$

Le but de cet exercice est de trouver a tel que P_a possède trois racines dans $\mathbb{Z}$.

On suppose que a existe. Soient t_1, t_2, t_3 les trois racines entières de P_a avec $t_1 \leq t_2 \leq t_3$.

1. Que valent $t_1 + t_2 + t_3$ et $t_1 t_2 t_3$?

2. Calculer $P_a(0)$, et en déduire que t_1 est strictement négatif.

3. Déduire des questions 1. et 2. que : $t_1 \leq 0 \leq t_2 \leq t_3 \leq -t_1$, puis les valeurs de t_1, t_2, t_3 .

4. Montrer que $P'_a(t_2) = 0$. En déduire la valeur de a .

5. Réciproquement, montrer que la valeur de a ainsi trouvée convient bien.

Exercice 4. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = z\}$.

1. Montrer que F est un ssev de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base..
2. Soit $H = \text{Vect}((1, -1, 2), (2, 1, 1))$. H et F sont-ils en somme directe?
3. Montrer que $G = \text{Vect}(-1, 0, 1)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer une base B adaptée à $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
5. Donner les coordonnées de $(1, 2, 3)$ dans B .
6. Montrer que $((1, 0, 0), (0, 1, 1), (2, 1, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. En déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$ différent de G .

Correction du DS n 7

Correction 1 1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les événements A_n, B_n, C_n forment un système complet donc, en particulier, $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$, c'est-à-dire $a_n + b_n + c_n = 1$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule $a_{n+1} = P(A_{n+1})$ à l'aide de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) . Cela donne

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$$

c'est-à-dire précisément $a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n$. On obtient de même

$$b_{n+1} = p_{AB}a_n + p_{BB}b_n + p_{CB}c_n \text{ et } c_{n+1} = p_{AC}a_n + p_{BC}b_n + p_{CC}c_n.$$

2. (a) Soit $M \in \{A, B, C\}$. Depuis la lettre M , les seules possibilités de déplacement pour la puce sont M, M', M'' où M' et M'' sont les deux autres lettres. Donc $p_{MM} + p_{MM'} + p_{MM''} = 1$ et donc $2\alpha + p_{MM} = 1$. Ainsi, $p_{MM} = 1 - 2\alpha$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 1°b), on a

$$a_{n+1} = (1 - 2\alpha)a_n + \alpha b_n + \alpha c_n = (1 - 2\alpha)a_n + \alpha(b_n + c_n).$$

Or $a_n + b_n + c_n = 1$, donc $b_n + c_n = 1 - a_n$. Il en résulte que

$$a_{n+1} = (1 - 3\alpha)a_n + \alpha.$$

(c) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_n + \lambda$ soit géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} + \lambda \\ &= (1 - 3\alpha)a_n + \alpha + \lambda \\ &= (1 - 3\alpha)(u_n - \lambda) + \alpha + \lambda \\ &= (1 - 3\alpha)u_n + \alpha(1 + 3\lambda). \end{aligned}$$

On prend donc $\lambda = -\frac{1}{3}$. On a alors $u_n = u_0 \times (1 - 3\alpha)^n = (a_0 - \frac{1}{3}) \times (1 - 3\alpha)^n$ et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = u_n - \lambda = \left(a_0 - \frac{1}{3}\right) \times (1 - 3\alpha)^n + \frac{1}{3}.$$

(d) Comme $1 - 3\alpha \in]-1, 1[$ (car $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 3\alpha)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

3. (a) La condition $p_{AA} = 1$ signifie que le point A est « collant » : si la puce y passe, elle y reste!

(b) On a $p_{BA} + p_{BB} + p_{BC} = 1$ donc $p_{BC} = 0$. De plus, $p_{AB} = p_{AC} = 0$ puisque $p_{AA} = 1$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$c_{n+1} = p_{AC}a_n + p_{BC}b_n + p_{CC}c_n = \frac{1}{3}c_n$$

donc la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On en déduit que $c_n = c_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout

$n \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_{n+1} = p_{AB}a_n + p_{BB}b_n + p_{CB}c_n = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n,$$

et

$$b_{n+2} = p_{AB}a_{n+1} + p_{BB}b_{n+1} + p_{CB}c_{n+1} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{6}c_n + \frac{1}{9}c_n = \frac{1}{4}b_n + \frac{5}{18}c_n.$$

donc

$$b_{n+2} - \frac{5}{6}b_{n+1} + \frac{1}{6}b_n = \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{5}{18}c_n\right) - \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n\right) + \frac{1}{6}b_n = 0$$

donc $b_{n+2} = \frac{5}{6}b_{n+1} - \frac{1}{6}b_n$. La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation

caractéristique est $\lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{6} = 0$. Son discriminant est $\Delta = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = \left(\frac{1}{6}\right)^2$. Les deux solutions sont

$$\lambda_1 = \frac{\frac{5}{6} + \frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs de A et B puisqu'on nous demande seulement la valeur de la limite de b_n .

Comme $\lambda_1, \lambda_2 \in]-1, 1[$, on peut en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

(e) On sait que $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on vient de montrer que les suites $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers 0. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

Correction 2 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide des formules de Moivre, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n\theta)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(n\theta) = \Im m(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ donc

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) &= \Im m \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \theta^{n-k} (i \sin \theta)^k \right) \\ &= \Im m \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \cos \theta^{n-k} (i \sin \theta)^k \right) \\ &\text{car les termes d'indices pairs sont réels} \\ &= \Im m \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \cos \theta^{n-2j-1} i (-1)^j \sin \theta^{2j+1} \right) \\ &\text{en posant } k = 2j+1 \\ &= \sin \theta \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \cos \theta^{n-2j-1} (-1)^j (1 - \cos^2 \theta)^j \end{aligned}$$

On pose $P_n(X) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} X^{n-2j-1} (-1)^j (1-X^2)^j$. D'après le calcul précédent, on a bien

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n\theta)$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unique.

Soit Q_n un polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, Q_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n\theta)$. Alors pour tout $\theta \in]0, \pi[$, on a $P_n(\cos \theta) = Q_n(\cos \theta)$ donc $P_n - Q_n$ admet tous les réels de $] -1, 1[$ pour racines, on en déduit qu'il est nul d'où l'unicité.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

On utilise les formules trigonométriques : Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on sait que

$$\sin(n+2)\theta = \sin((n+1)\theta + \theta) = \sin(n+1)\theta \cos \theta + \sin \theta \cos(n+1)\theta,$$

et

$$\sin(n\theta) = \sin((n+1)\theta - \theta) = \sin(n+1)\theta \cos \theta - \sin \theta \cos(n+1)\theta,$$

donc, en sommant les deux égalités, on obtient

$$\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) = 2 \cos \theta \sin(n+1)\theta,$$

d'où

$$\sin((n+2)\theta) = 2 \cos \theta \sin(n+1)\theta - \sin(n\theta).$$

On en déduit que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin \theta P_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta \sin \theta P_{n+1}(\cos \theta) - \sin \theta P_n(\cos \theta),$$

puis, pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$P_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta) - P_n(\cos \theta).$$

On en déduit que le polynôme $P_{n+2} - 2XP_{n+1} + P_n$ s'annule sur $] -1, 1[$, il est donc nul. On a bien l'égalité souhaitée.

4. Déterminer le terme dominant de P_n .

On raisonne par récurrence forte sur n . On note $HR(n)$: " le terme dominant de P_n est $2^{n-1} X^{n-1}$ ".

On a $P_1 = 1$ donc le résultat est vrai au rang 1. Soit n tel que $HR(n)$ est vraie et $HR(n+1)$ aussi. On sait, par hypothèses de récurrence, que $\deg(P_n) = n-1$ et $\deg(2XP_{n+1}) = n+1$ donc $\deg(P_{n+2}) = n+2$. Par ailleurs, le coefficient dominant de P_{n+2} est celui de $2XP_{n+1}$ donc $2 \cdots 2^n$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, le terme dominant de P_{n+2} est $2^{n+1} X^{n+1}$, la propriété est bien héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P_{2m+1}(0) = (-1)^m$.

Par définition du polynôme,

$$P_{2m+1}(0) = P_{2m+1}\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{(2m+1)\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) = (-1)^m$$

On peut aussi raisonner par récurrence sur m . On a $P_1 = 1$ donc la propriété est initialisée.

Soit m tel que $P_{2m+1}(0) = (-1)^m$. Alors $P_{2m+3} = 2XP_{2m+2} - P_{2m+1}$ donc $P_{2m+3}(0) = -P_{2m+1}(0) = -(-1)^m$ par hypothèse de récurrence.

On a donc $P_{2m+3}(0) = (-1)^{m+1}$ donc la propriété est héréditaire ce qui achève la récurrence.

6. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P'_{2m}(0) = (-1)^{m+1}2m$

Là encore, on utilise la relation $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ que l'on dérive, on a donc

$$P'_{n+2} = 2XP'_{n+1} + 2P_{n+1} - P'_n.$$

On sait que $P_0 = 0$ donc $P'_0(0) = 0$ et la propriété est initialisée.

Soit m tel que $P'_{2m}(0) = (-1)^{m+1}2m$, alors

$$P'_{2m+2}(0) = 2P_{2m+1}(0) - P'_{2m}(0) = 2(-1)^m - 2m(-1)^{m+1}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et la question précédente.

On a donc

$$P'_{2m+2}(0) = (2m+2)(-1)^m = (2m+2)(-1)^{m+2},$$

ce qui achève de montrer l'hérédité.

7. Déterminer $n-1$ racines de P_n appartenant à $] -1, 1[$.

On a

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) = 0 &\Leftrightarrow n\theta \equiv 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

et

$$P_n(\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(n\theta) = 0 \text{ et } \sin\theta \neq 0.$$

On remarque que $\{\cos \frac{k\pi}{n}\}$ est racine de P_n pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}$. Si on fait varier k dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors $\frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$, intervalle sur lequel $\cos$ est injectif, on a donc $n-1$ racines distinctes de P_n appartenant à $] -1, 1[$.

Remarque : Si on cherche à expliciter $\{\cos \frac{k\pi}{n}\}$ pour k n'étant pas un multiple de n , on peut tout d'abord supposer que k varie de 1 à $2n-1$ (sans valoir n) par 2π -périodicité, ce qui nous donne $2n-2$ valeurs de k . Il faut alors remarquer que si $k \in \llbracket n+1, 2n-1 \rrbracket$, alors

$$\cos \frac{k\pi}{n} = \cos \left(\frac{\pi + (k-n)\pi}{n} \right) = \cos \left(\frac{\pi - (k-n)\pi}{n} \right) = \cos \frac{(2n-k)\pi}{n},$$

et comme $2k-n \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on en déduit que

$$\{\cos \frac{k\pi}{n}, k \in \llbracket n+1, 2n-1 \rrbracket\} = \{\cos \frac{k\pi}{n}, k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}$$

ainsi, on peut montrer que les racines trouvées sont exactement toutes les racines de $] -1, 1[$ sans utiliser un argument sur le degré.

8. En déduire l'ensemble des racines de P_n puis sa factorisation.

On sait que P_n est de degré $n-1$, il a donc au plus $n-1$ racines comptées avec multiplicité. On a trouvé $n-1$ racines distinctes de P_n à la question précédente, ce sont donc toutes les racines de P_n . En utilisant son coefficient dominant déterminé plus tôt, on obtient :

$$P_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \cos \frac{k\pi}{n} \right).$$

9. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Il suffit d'évaluer P_n en $\cos \frac{\pi}{n+1}$:

$$P_n \left(\cos \frac{\pi}{n+1} \right) \sin \frac{\pi}{n+1} = \sin \frac{n\pi}{n+1},$$

et $\sin \frac{n\pi}{n+1} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{n+1} \right) = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Comme $\sin \frac{\pi}{n+1} \neq 0$, on a donc

$$P_n \left(\cos \frac{\pi}{n+1} \right) = 1 \text{ donc } 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{k\pi}{n} \right) = 1.$$

En divisant par 2^{n-1} , on obtient bien l'égalité souhaitée.

10. On suppose $n = 2m + 1$.

(a) Montrer que $2^{2m} \prod_{k=1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = (-1)^m$.

On sait que

$$2^{2m} (-1)^{2m} \prod_{k=1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = P_{2m+1}(0),$$

et $P_{2m+1}(0) = (-1)^m$ d'après la question 5. On a donc bien l'égalité souhaitée.

(b) Montrer, à l'aide d'un changement d'indice qui inverse l'ordre de sommation, que

$$\prod_{k=m+1}^{2m} \cos \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) = (-1)^m \prod_{k=1}^m \cos \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right).$$

On écrit $\prod_{k=1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1} \prod_{k=m+1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1}$ et on pose $j = 2m+1 - k$ dans le se-

cond produit. j varie alors de 1 à m donc $\prod_{k=m+1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \prod_{j=1}^m \cos \frac{(2m+1-j)\pi}{2m+1} = \prod_{j=1}^m \cos \left(\pi - \frac{j\pi}{2m+1} \right)$

$(-1)^m \prod_{j=1}^m \cos \frac{j\pi}{2m+1}$. L'indice j étant muet, on obtient :

$$2^{2m} (-1)^m \left(\prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1} \right)^2 = (-1)^m,$$

donc

$$\left(\prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1} \right)^2 = \frac{1}{2^{2m}}.$$

(c) En déduire que $\frac{1}{2^m} = \prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1}$.

On remarque que $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\frac{k}{2m+1} \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$ donc $\cos \frac{k\pi}{2m+1} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. Chaque facteur du produit est positif donc le produit l'est également. On a

$$\prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m}.$$

11. On suppose $n = 2m$.

(a) Montrer que 0 est racine de P_{2m} .

On a remarque que $P_{2m} \left(\cos \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\pi}{2} = \sin \left(2m \frac{\pi}{2} \right) = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} \neq 0$ donc $P_{2m}(0) = 0$.

(b) En déduire l'existence de $B_m \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_{2m} = XB_m$.

0 étant racine de P_{2m} , X divise ce dernier d'où l'existence de B_m .

(c) Montrer que $B_m(0) = P'_{2m}(0)$.

On dérive l'égalité $P_{2m} = XB_m$ on obtient $P'_{2m} = B_m + XB'_m$ puis en évaluant en 0 : $P'_{2m}(0) = B_m(0)$.

(d) En déduire que $\prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$

On sait que B_m et P_{2m} ont même coefficient dominant et les racines de B_m sont exactement les racines non nulles de P_{2m} . On a donc

$$2^{2m-1}(-1)^{2m-2} \prod_{\substack{1 \leq k \leq 2m-1 \\ k \neq m}} \cos \frac{k\pi}{2m} = B_m(0).$$

On a vu à la question 6 que $P'_{2m}(0) = (-1)^{m+1}2m$, on a donc

$$2^{2m-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq 2m-1 \\ k \neq m}} \cos \frac{k\pi}{2m} = 2m(-1)^{m+1}.$$

On va maintenant scinder le produit en deux :

$$\prod_{\substack{1 \leq k \leq 2m-1 \\ k \neq m}} \cos \frac{k\pi}{2m} = \prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} \prod_{k=m+1}^{2m-1} \cos \frac{k\pi}{2m}.$$

On fait un changement d'indice dans le deuxième produit : On pose $j = 2m - k$, j varie de 1 à $m - 1$ d'où

$$\begin{aligned} \prod_{j=m+1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m} &= \prod_{j=1}^{m-1} \cos \frac{(2m-j)\pi}{2m} \\ &= \prod_{j=m-1}^{\cos} \left(\pi - \frac{j\pi}{2m} \right) \\ &= (-1)^{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} \cos \frac{j\pi}{2m}. \end{aligned}$$

On obtient donc, comme j est un indice muet :

$$2^{2m-1}(-1)^{m-1} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} \right)^2 = 2m(-1)^{m+1},$$

d'où

$$\left(\prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} \right)^2 = \frac{m}{2^{2m-2}}.$$

À nouveau, tous les facteurs du produit sont positifs, on a donc

$$\prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}.$$

On retrouve bien le résultat souhaité.

Correction 3 Soit a un entier naturel. Soit P_a la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall t \in \mathbb{R}, P_a(t) = t^3 - t(a^2 + 2a) + 2$. On cherche a tel que P_a possède trois racines dans $\mathbb{Z}$.

On suppose que a existe, et on note t_1, t_2, t_3 les trois racines entières de P_a , avec $t_1 \leq t_2 \leq t_3$.

- Si t_1, t_2, t_3 sont les trois racines de P_a , comme le coefficient dominant de P_a est 1, P_a se factorise en : $\forall t \in \mathbb{R}, P_a(t) = (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = t^3 - t(a^2 + 2a) + 2$. En redéveloppant la forme factorisée, on obtient :
 $t^3 - (t_1 + t_2 + t_3)t^2 + (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)t - t_1 t_2 t_3 = t^3 - t(a^2 + 2a) + 2$. On en déduit, par identification des coefficients de même degré :
 $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ et $t_1 t_2 t_3 = -2$.
- $P_a(0) = 2 > 0$. P_a est une fonction polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$. On a $\lim_{t \rightarrow -\infty} P_a(t) = -\infty$, et $P_a(0) = 2 > 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_1 \in]-\infty; 0[$ tel que $P_a(t_1) = 0$: on en déduit que $t_1 < 0$.
- Démontrons que t_2 et t_3 sont positives et inférieures à $-t_1$.
On a $t_2 + t_3 = -t_1$, donc $t_2 + t_3 > 0$. Comme $t_1 t_2 t_3 = -2 < 0$, t_1 étant strictement négatif, on en déduit que $t_2 t_3 > 0$. t_2 et t_3 sont donc de même signe, comme leur somme est positive, ils sont donc tous les deux strictement positifs!
On a donc $t_2 \geq 0$, $t_3 \geq 0$ et $t_2 + t_3 = -t_1$: donc $t_2 \leq t_1$ et $t_3 \leq -t_1$, d'où : $t_1 < 0 \leq t_2 \leq t_3 \leq -t_1$.
Déterminons alors les valeurs de t_1, t_2, t_3 : on a $t_1 t_2 t_3 = -2$ et ces trois nombres sont entiers, deux positifs, un négatif. Comme 2 n'a que deux diviseurs positifs (1 et 2), on a nécessairement :
 $t_1 = -2, t_2 = t_3 = 1$.
- Le polynôme P_a admet donc $t_2 = 1$ comme racine double, donc $P'_a(t_2) = 0$. Or $P'_a(t) = 3t^2 - (a^2 + 2a)$. On en déduit que $3 - (a^2 + 2a) = 0$, ie $a^2 + 2a - 3 = 0 \iff (a - 1)(a + 3) = 0$.
Comme a est un entier naturel, on en déduit que $a = 1$.
- Réciproquement, montrons que cette valeur de a convient :
 $P_1(t) = t^3 - 3t + 2$: 1 est racine évidente, donc P_1 se factorise par $(t - 1)$: $P_1(t) = (t - 1)(t^2 + t - 2) = (t - 1)^2(t + 2)$: P_1 a bien trois racines entières dont deux sont confondues.
Remarque : $P_{-3} = P_1 \dots$.

Correction 4 1. Soit $X \in \mathbb{R}^3$. On a $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in F &\iff y = z \\ &\iff X = (x, y, y) \\ &\iff X = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1) \\ &\iff X \in \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 1)) \end{aligned}$$

On a montré, par équivalence, que $F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 1))$ donc F est un ssev de $\mathbb{R}^3$ et $((1, 0, 0), (0, 1, 1))$ est une famille génératrice de F . Elle est composée de deux vecteurs non colinéaires donc c'est une base de F .

- On remarque que $(2, 1, 1)$ est un élément de F donc F et H ne sont pas en somme directe.
- Pour montrer que $G = \text{Vect}(0, 0, 1)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$, on va montrer que la famille $((1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On remarque tout d'abord que la famille est échelonnée donc libre. Par ailleurs, on a

$$\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

en enlevant le troisième vecteur au deuxième. On reconnaît la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donc $\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la famille $((1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ est bien génératrice de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

On peut aussi chercher à écrire un élément de $\mathbb{R}^3$ comme CL unique d'un élément de F et d'un élément de G :

Analyse : Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe $(Y, Z) \in F \times G$ tel que $X = Y + Z$. On a $Y = (a, b, b)$ et $Z = (-c, 0, c)$. On a donc $a = x - y + z$, $b = y$ et $c = z - y$.

Synthèse : Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $X = \underbrace{(x - y + z, y, y)}_{\in F} + \underbrace{(-y + z, 0, z - y)}_{\in G}$ On a montré que tout

élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G . De plus, d'après la phase d'analyse, cette écriture est unique. On en déduit que $\mathbb{R}^3 \subset F \oplus G$. L'autre inclusion étant claire, on a l'égalité ce qui montre que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4. Il suffit de faire la concaténation d'une base de F et d'une base de G . Une base B adaptée à $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ est (par exemple) la famille $((1, 0, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, 1))$.
5. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(1, 2, 3) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(-1, 0, 1)$. On trouve $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 2, 1)$ donc les coordonnées de $(1, 2, 3)$ dans B sont $(2, 2, 1)$.
6. On veut montrer que $((1, 0, 0), (0, 1, 1), (2, 1, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On va montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique triplet (α, β, γ) tel que $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(2, 1, 0) = (x, y, z)$.

On identifie les coefficients :

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = x \\ \beta + \gamma = y \\ \beta = z \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = x \\ \gamma + \beta = y \\ \beta = z \end{cases}$$

On voit que le système est échelonné, il admet donc une unique solution. On en déduit que tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit, de manière unique comme CL de la famille, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

On peut aussi dire que, à permutation près, la famille est échelonnée donc libre. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 1), (2, 1, 0)) &= \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)) \quad \nu_3 \leftarrow \nu_3 - 2\nu_1 \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)) \quad \nu_2 \leftarrow \nu_2 - \nu_3 \\ &= \mathbb{R}^3 \text{ car on reconnaît, à permutation près, la base canonique de } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 1), (2, 1, 0))$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

7. On en déduit que $\text{Vect}(2, 1, 0)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$. Il est différent de G car $(2, 1, 0) \notin G$.