

## TD 18 : Applications linéaires.

### Exercice 1.

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que,  $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$ . Montrer que  $f$  est une homothétie.

### Exercice 2.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $x_0$  tel que  $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ . Montrer que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est libre.

## 1 Détermination linéarité/noyau/image

### Exercice 3.

Les applications suivantes sont-elles linéaires?

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto xy \end{cases}$$

$$\varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x + 1 \end{cases}$$

$$\varphi_3 : \begin{cases} C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f & \mapsto (\operatorname{Re}(f(0)), |f(1)|) \end{cases}$$

$$\varphi_4 : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K} \\ P & \mapsto P(0) + P'(1) \end{cases}$$

$$\varphi_5 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

$$\varphi_6 : \begin{cases} C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(1/4) - \int_1^2 f(t) dt \end{cases}$$

$$\varphi_7 : \begin{cases} C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(3/4) + f(5) \end{cases}$$

$$\varphi_8 : \begin{cases} C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto \left( t \mapsto \frac{f(t)}{t^2 + 1} \right) \end{cases}$$

### Exercice 4.

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires et déterminer leur noyau et leur image quand elles le sont.

$$1. \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2.$$

$$2. \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3.$$

$$3. \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}.$$

$$4. \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x + 5y.$$

$$5. \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}.$$

$$6. \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y).$$

$$7. \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, y).$$

$$8. \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) : f \mapsto f'.$$

$$9. \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2}).$$

$$10. \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}}).$$

### Exercice 5.

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P - XP' \end{cases}$ . Montrer que l'application est linéaire et déterminer son noyau et son image.

### Exercice 6.

Montrer que l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto P - XP' - P(0) \end{cases}$  est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

### Exercice 7.

Montrer que l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto \int_0^1 P(t) dt \end{cases}$  est linéaire et déterminer son noyau et son image.

### Exercice 8.

On considère la trace  $\operatorname{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ . Déterminer son noyau et son image. On donnera une base de ces ensembles et leur dimension.

## 2 Injectivité/surjectivité/bijektivité

### Exercice 9.

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On considère l'application  $P \mapsto P - P'$ . Montrer que c'est un automorphisme et déterminer son inverse.

### Exercice 10.

Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto P + P' \end{cases}$ . Montrer que  $\varphi$  est linéaire. Est-elle bijective?

### Exercice 11.

Soient  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et  $\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ f & \mapsto f + f' \end{cases}$ . L'application est-elle injective? surjective?

### Exercice 12.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $g = id_E - f$ . Montrer que  $g$  est bijective et donner son inverse.

### Exercice 13.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $n \geq 2$ . On considère  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ f = -\operatorname{Id}_E$ . Soit  $a$  un vecteur non nul de  $E$ .

- Montrer que  $f$  est un automorphisme.
- Montrer que la famille  $(a, f(a))$  est libre.  
On pose  $G_a = \operatorname{Vect}(a, f(a))$ .
- Montrer que  $G_a$  est stable par  $f$  (c-à-d que  $\forall x \in G_a, f(x) \in G_a$ ).
- Montrer que si un sev  $F$  stable par  $f$  contient  $a$ , alors  $G_a \subset F$ .

5. Si  $E = \mathbb{R}^2$ , donner un exemple d'endomorphisme  $f$  qui vérifie l'hypothèse de l'énoncé.

#### Exercice 14.

On considère l'application  $\varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$   
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Démontrer que l'application  $\varphi$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire.
2. Déterminer  $\text{Ker}(\varphi)$ .
3. Démontrer que  $\varphi$  est surjective. L'application  $\varphi$  est-elle un automorphisme?

### 3 Relations entre noyau et image

#### Exercice 15.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ f)$$

$$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f)$$

#### Exercice 16.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$  sont stables par  $g$ .

#### Exercice 17.

$E$  et  $F$  sont des  $\mathbb{K}$ -ev,  $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ . Comparer (au sens de l'inclusion) :

1.  $\text{ker}(u) \cap \text{ker}(v)$  et  $\text{ker}(u + v)$ .
2.  $\text{Im}(u) + \text{Im}(v)$  et  $\text{Im}(u + v)$ .

### 4 Projection

#### Exercice 18.

On pose  $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = P(1) = 0\}$  et  $G = \text{Vect}(X^2 + X, X^3 + 1)$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}[X]$  et déterminer le projeté de  $X^5 - X^3 + 1$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

#### Exercice 19.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $p$  et  $q$  des projecteurs de  $E$  tels que  $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Montrer que  $r = p + q - q \circ p$  est un projecteur.
2. Montrer que

$$\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \text{ et } \text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$$

## 5 Si besoin d'encre un peu d'entraînement

#### Exercice 20.

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires et déterminer leur noyau et leur image quand elles le sont.

1.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  si  $x^2 + y^2 \neq 0$  et 0 sinon.
2.  $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t) dt\}$ .
3.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4.  $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t \in [0, 1]} f(t)$ .
5.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto$  la solution du système :  $\begin{cases} 3u - v = x \\ 6u + 2v = y. \end{cases}$
6.  $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 \ln(1 + |f(t)|) dt$ .
7.  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t) dt$ .

#### Exercice 21.

Soit  $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ , on définit l'application  $\varphi$  par

$$\forall f \in E, \varphi(f) = g \text{ avec } g : x \mapsto \int_0^x t f(t) dt.$$

Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ . Est-il injectif? surjectif?

#### Exercice 22.

Soient  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 - 1)P' - aXP \end{cases}$ .

1. Montrer que  $\varphi_a$  est un endomorphisme et étudier le degré de  $\varphi_a(P)$  en fonction du degré de  $P$ .
2. Lorsque  $a \notin \mathbb{N}$ , montrer que  $\varphi_a$  est injective. Est-ce un isomorphisme?

#### Exercice 23.

Soient  $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$  et  $G = \text{Vect}(X)$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Déterminer l'image par la projection  $f$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  de  $X^2 - 3X + 1$  et  $X^i - 1, i \in \mathbb{N}^*$ .

## 6 Une fois qu'on est à l'aise

#### Exercice 24.

Soient  $p$  un projecteur de  $E$  et  $f = p + i d_E$ .

1. Montrer que  $f$  est bijective.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Exprimer  $f^n$  en fonction de  $p$  et  $n$

**Exercice 25.** 

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$ .

1. Montrer que  $p + q$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
2. Supposons dorénavant que  $p + q$  est un projecteur, montrer que  $\text{Im}(p)$  et  $\text{Im}(q)$  sont en somme directe.
3. Montrer ensuite que  $p + q$  est la projection de  $E$  sur  $\text{Im} p \oplus \text{Im} q$  parallèlement à  $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ .

**Exercice 26.**

Soit  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel, soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $(E, +, \cdot)$ . Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

- (i)  $f \circ g$  est un automorphisme
- (ii)  $f$  est surjective,  $g$  est injective et  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$

**Exercice 27.**  

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $f \circ g = id_E$ . Déterminer  $\text{Ker}(g \circ f)$  et  $\text{Im}(g \circ f)$ .

**Exercice 28.**  

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^3 - u^2 + u - id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Montrer que  $\text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Ker}(u^2 + id_E) = E$ .

**Memo**

- Comment montrer qu'une application est linéaire?
  - Utiliser la linéarité de l'intégrale, la dérivation, la somme, le produit matriciel....
  - Revenir à la définition
- Comment déterminer l'image d'une application linéaire?
  - Prendre un élément de l'espace d'arrivée et raisonner par équivalence.
  - Trouver une inclusion puis montrer l'équivalence.
- Comment déterminer le noyau d'une application linéaire?
  - Prendre un élément de l'espace de départ et raisonner par équivalence.
- Comment déterminer si une application linéaire  $f$  est un isomorphisme?
  - Résoudre l'équation  $f(X) = Y$
  - Déterminer le noyau et l'image
- Comment montrer que  $p$  est un projecteur?
  - Montrer que  $p$  est linéaire et  $p \circ p = p$
- Comment déterminer les espaces caractéristiques d'un projecteur? Déterminer son noyau et son image