

Applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Applications linéaires

On considère dans ce chapitre deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$.

1.1 Généralités

Définition 1. On appelle application linéaire de E dans F toute application $f : E \rightarrow F$ qui vérifie :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Définition 2. On appelle endomorphisme de E tout application linéaire $f : E \rightarrow E$ (donc avec $E = F$).

Définition 3. On appelle forme linéaire une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (les images sont donc des scalaires).

Proposition 1.

Soit $f : E \rightarrow F$, f est linéaire si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Autrement dit, comme pour la démonstration d'un ssev, pas besoin de faire une combinaison linéaire avec deux scalaires, un seul suffit !

Exemples 1.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $f_\lambda : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto \lambda x \end{cases}$ est un endomorphisme de E .

2. Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, alors l'application : $\begin{cases} M_{p1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow M_{n1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto AX \end{cases}$ est linéaire

3. L'application $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, y, -x) \end{cases}$ est linéaire ;

4. En revanche, l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto 5x^2 + 3y \end{cases}$ n'est pas linéaire.

5. L'application $\text{Tr} : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{K} \\ A = (a_{i,j}) & \rightarrow \sum_{i=1}^n a_{i,i} \end{cases}$ est linéaire .

6. La transposition $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \rightarrow A^\top \end{cases}$ est linéaire.

7. La dérivation et l'intégrale de fonctions sont linéaires, plus précisément les applications :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto f' \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_a^b f(t)dt \end{cases} ,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, sont linéaires.

On montre, de même que pour les applications, que :

$$\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto P'(X) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K} \\ P(X) & \mapsto \int_a^b P(t)dt \end{cases} ,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont linéaires.

8. L'évaluation en $a \in \mathbb{K}$ des polynômes. Plus précisément, pour tout $a \in \mathbb{K}$ fixé, l'application

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K} \\ P & \rightarrow P(a) \end{cases} \text{ est linéaire.}$$

Proposition 2 (une condition nécessaire de linéarité). Toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ vérifie :

$$f(0_E) = 0_F.$$

Exemple 2. On peut donc affirmer rapidement que l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto x - y + 2z + 1 \end{cases}$$

n'est pas linéaire puisque $f(0, 0, 0) = 1 \neq 0$.

1.2 Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

On note $\mathcal{L}(E)$, au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$, l'ensemble des endomorphismes de E .

Proposition 3.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel pour la loi de composition interne $+$ et la loi de composition externe $\cdot$ définies par

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E, F), \quad f + g : \begin{cases} E & \rightarrow F \\ x & \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{cases}$$
$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot f : \begin{cases} E & \rightarrow F \\ x & \mapsto (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

Autrement dit, une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

1.3 Composition d'applications linéaires.

On considère un troisième espace vectoriel G .

Proposition 4.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G).$$

Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est linéaire.

Remarque. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors pour tout n on définit $f^n = \underbrace{f \circ f \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$. On a bien $f^n \in \mathcal{L}(E)$.

Exemple 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, x - y)$, calculer f^2 .

Proposition 5.

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f \circ g = g \circ f$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

1.4 Applications linéaires bijectives.

Définition 4.

- On appelle isomorphisme de E dans F toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective.
- On appelle automorphisme de E tout endomorphisme bijectif de E . Un automorphisme est donc à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.
- On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme entre E et F .

Exemples 4.

1. Toute homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est un automorphisme de E .

2. L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, x - y) \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ (a_0, \dots, a_n) & \longmapsto \sum_{k=0}^n a_k X^k \end{cases}$ est un isomorphisme, $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont isomorphes.

4. $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes (en tant que $\mathbb{R}$ -ev).

Proposition 6.

La réciproque d'un isomorphisme est linéaire:

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ bijective} \implies f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E).$$

Autrement dit, f^{-1} est aussi un isomorphisme.

1.5 Noyau et image d'une application linéaire

1.5.1 Noyau

Définition 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle noyau de f l'ensemble, noté $\text{Ker}(f)$, des antécédents de 0_F par f :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Proposition 7.

Le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un sous espace vectoriel de E .

Exemples 5.

1. On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + y + z, x - y) \end{cases}$. On cherche à expliciter l'ensemble

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 = x - y\}.$$

2. Déterminer le noyau de l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P(X) & \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \end{cases}$$

3. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'ensemble

$$F_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(a) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

4. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée, l'ensemble

$$\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$$

appelé commutant de A , est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 8.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, soit y un élément de F et $x \in E$ un antécédent de y par f . Alors,

$$\{a + x, a \in \text{Ker}(f)\} = f^{-1}(\{y\})$$

où $f^{-1}(\{y\})$ désigne l'image réciproque du singleton $\{y\}$ c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de y par f .

Proposition 9.

Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si son noyau $\text{Ker}(f)$ ne contient que 0_E .

Exemples 6.

1. On considère l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x - y, y - x) \end{cases} .$

2. On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto P(X) + P'(X) \end{cases} .$

3. La dérivation des polynômes

$$D : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto P'(X) \end{cases}$$

n'est pas injective.



Si $f : E \rightarrow F$ n'est pas linéaire, le fait que f admette 0_E comme unique antécédent de 0_F ne prouve pas l'injectivité.

1.5.2 Image

Proposition 10.

L'image $\text{Im}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, c'est-à-dire l'ensemble:

$$\text{Im}(f) = \{y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y\}$$

est un sous-espace vectoriel de F .

Remarque: Plus généralement, si A est un s.e.v. de E alors $f(A)$ (image directe de l'ensemble A) est un s.e.v. de F

Proposition 11.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$

Remarque: Ce résultat est vrai pour toute application, qu'elle soit linéaire ou non.

Exemples 7.

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + y, x + z) \end{cases}$, déterminer son image;
2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x - y, y - z, z - x) \end{cases}$, déterminer son image.
3. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases}$, déterminer son image.
4. Soit $\psi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases}$.

1.5.3 Noyau et image de $g \circ f$

Proposition 12.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ et:

- $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f) \subset E$.
- et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g) \subset G$.



Ces résultats, bien que très classiques, doivent être redémontrés avant d'être utilisés.

Remarque. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Im}(f^{n+1}) \subset \text{Im}(f^n)$ et $\text{Ker}(f^n) \subset \text{Ker}(f^{n+1})$.

2 Projecteur et symétrie

Soient F et G deux s.e.v. supplémentaires de E : $E = F \oplus G$.

2.1 Définition, exemples et linéarité

Définition 6. On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application qui, à tout vecteur $x \in E$, associe l'unique vecteur $y \in F$ de la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$:

$$\exists!(y, z) \in F \times G, \quad x = y + z.$$

En pratique : Pour déterminer l'image de x par la projection sur F parallèlement à G , il faut décomposer x en somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Exemples 8.

1. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (donc $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$), on note p la projection sur $\text{vect}(e_1)$ parallèlement à $\text{vect}(e_2)$. C'est l'endomorphisme $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$p(x, y) = (x, 0)$$

2. On note toujours (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose $F = \text{Vect}(e_1)$ et $G = \text{Vect}(e_1 + e_2)$ et on cherche la projection sur F parallèlement à G .

3. On veut maintenant déterminer l'expression de la projection f de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\text{Vect}(X^2)$ parallèlement à $\mathbb{R}_1[X]$.
4. On souhaite déterminer l'expression de la projection g sur $\text{Vect}(X^2)$ parallèlement à $\text{Vect}(X^2 + 1, X)$.
5. Nous avons vu que les ensembles :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = A^\top\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = -A^\top\}$$

sont des s.e.v. supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'expression de la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Proposition 13.

Tout projecteur de E est un endomorphisme de E .

2.2 Espaces caractéristiques et caractérisation

Définition 7. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G , on dit que F et G sont les espaces caractéristiques de p .

Proposition 14.

Soit p le projecteur sur F parallèlement à G . Alors :

$$F = \text{Im}(p) = \ker(p - \text{Id}_E) \quad \text{et} \quad G = \ker(p).$$

Remarque: ce théorème permet de déterminer les espaces caractéristiques d'un projecteur quand on ne les connaît pas ! En effet, si je vous dis : f est un projecteur, déterminer ses espaces caractéristiques, il vous suffit de déterminer le noyau et l'image de f .

Corollaire 15.

Soit p un projecteur de E , alors p projette sur son image, parallèlement à son noyau. De plus, $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E et pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \text{Ker}(p)}.$$



Il existe des endomorphismes f tel que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ et qui ne sont pas des projecteurs !

Corollaire 16.

Soit p un projecteur, alors $p \circ p = p$.

Il se trouve que la réciproque est vraie !!!

Théorème 17.

Soit un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = f$, alors f est un projecteur.

2.3 Projecteurs associés.

Proposition 18.

Soit p le projecteur sur F parallèlement à G .

Soit q le projecteur sur G parallèlement à F .

On a :

$$p + q = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On dit que p et q sont les projecteurs associés à la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

Remarque : Si p est un projecteur de E , alors $\text{Id}_E - p$ est le projecteur associé

2.4 Symétrie

Définition 8. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G supplémentaires dans E . On appelle symétrie d'axe F parallèlement à G l'application qui à $x \in E$ associe $a - b$ où $(a, b) \in F \times G$ est l'unique couple tel que $x = a + b$.

Exemple 9. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ d'axe $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$, parallèlement à $F = \text{Vect}(0, 0, 1)$. Donner l'expression de s .

Proposition 19.

La symétrie est une application linéaire.

Proposition 20.

Soit p le projecteur sur F parallèlement à G et s la symétrie d'axe F parallèlement à G , on a $s = 2p - \text{id}_E$.

Proposition 21.

Soit s une symétrie d'axe F parallèlement à G , alors $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Proposition 22.

Soit s une symétrie, alors $s^2 = \text{id}_E$, s est donc bijective d'inverse elle-même.

Exemple 10. Soit s la symétrie d'axe $\text{Vect}(1, 1, 1)$ parallèlement à $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$, déterminer une expression de s .

Proposition 23.

Soit maintenant f un endomorphisme de E tel que $f^2 = \text{id}_E$. alors $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(f + \text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E . De plus, f est la symétrie d'axe $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{id}_E)$.