

Réponses du TD n 18

Réponse 3 1. non

2. non
3. non
4. φ_4 est linéaire.
5. non
6. φ_6 est linéaire
7. φ_7 est linéaire.
8. φ_8 est linéaire.

Réponse 4 On note φ_i l'application linéaire de la question i.

1. non
2. non
3. non
4. L'application φ_4 est linéaire. On a $\text{Im}\varphi_4 = \mathbb{R}$ et $\text{Ker}(\varphi_4) = \text{Vect}(5, -3)$.
5. non
6. non
7. l'application φ_7 est linéaire. On a $\text{Im}\varphi_7 = \mathbb{R}^2$ et $\text{ker}(\varphi_7) = \{(0, 0)\}$.
8. L'application est linéaire, son image est l'ensemble des fonctions continues, son noyau est l'ensemble des fonctions constantes.
9. L'application est linéaire. On a $\text{Im}\varphi_9 = \text{vect}\left(2, \frac{1}{\pi}, \sqrt{2}\right)$ et $\text{Ker}(\varphi_9) = \{0\}$.
10. l'application φ_{10} est linéaire, l'image est $\mathbb{R}$ et le noyau est $\{0\}$.

Réponse 5 $\text{Ker} f = \text{vect}(X)$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, X^2, X^3)$.

Réponse 7 $\text{Ker}(f) = \left\{a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X], \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0\right\}$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Réponse 8 $\text{Ker}(\text{Tr})$ est engendré par la famille $(E_{i,j}, i \neq j, E_{ii} - E_{nn})$ et $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}$

Réponse 9 sa réciproque est l'application qui envoie le polynôme $\sum_{k=0}^n b_k X^k$ sur $\sum_{k=0}^n a_k X^k$,

avec $a_k = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k+i)!}{k!} b_{k+i}$.

Réponse 11 surjective et non injective

Réponse 12 $g^{-1} = id_E + f + f^2 + \dots + f^{n-1}$

Réponse 13 1. f est un automorphisme et son inverse est $-f$.
5. On prend $f : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

Réponse 14 $\text{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des suites constantes, l'application est surjective non injective.

Réponse 17 $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{ker}(u+v)$ et $\text{Im}(u+v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$

Réponse 18 Le projeté de P sur F parallèlement à G est donc : $X^5 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$.

Réponse 20 On note φ_i l'application linéaire de la question i.

1. non
2. L'application est linéaire par linéarité de l'intégrale, l'image est $\{x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, le noyau est l'ensemble $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t) dt = 0\}$.
3. non
4. non
5. On traduit en terme de coordonnées, l'application est :

$$\varphi_5 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 4x - y + \frac{z}{2} \end{cases}.$$

Je vous laisse la preuve de la linéarité.

Pour l'image, on remarque que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'élément $(0, -a, 0)$ (par exemple) est un antécédent de a par φ_5 donc φ_5 est surjective et son image vaut $\mathbb{R}$.

Pour le noyau, on se donne $X = (x, y, z)$ et on raisonne par équivalence :

$$X \in \text{Ker}(\varphi_5) \Leftrightarrow 4x - y + \frac{z}{2} = 0.$$

donc $\text{Ker}(\varphi_5) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x - y + \frac{z}{2} = 0\}$.

6. non
7. $\text{ker}\varphi_7 = \{(0, 0)\}$ et $\text{Im}\varphi_7 = \mathbb{R}^2$.
8. non
9. le noyau est l'ensemble des fonctions telles que $f'(1/2) + \int_0^1 f(t) dt = 0$, l'image est $\mathbb{R}$

Réponse 21 injective et non surjective

Réponse 22 Si $a \neq n$, on a $\deg(\varphi_a(P)) = \deg(P) + 1$, si $a = n$, $\deg(\varphi_a(P)) \leq \deg(P) + 1$.
 $\ker \varphi_a = \{0\}$ et φ_a non bijectif car un polynôme constant non nul n'admet pas d'antécédent.

Réponse 23 $f(2X^2 - 3X + 3) = X^2 - 2X + 1$ et $f(X^i - 1) = X^i - 1$

Réponse 24 $f^n = id_E + (2^n - 1)p$.

Réponse 27 $\text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f)$ et $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.