

TD 19 : Séries numériques.

1 Nature de séries

Exercice 1.

Étudier la nature des séries de terme général donné dans les cas suivants; on précisera si besoin le type de convergence.

1. $\frac{1}{n^2 + n}$	3. $\cos\left(\pi + \frac{n}{n+1}\right)$	5. $\sqrt[n]{n}$
2. $\frac{e^n}{n^5 + e^{-n}}$	4. $\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{2n}$	6. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Exercice 2.

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudier la convergence des séries de termes généraux :

1. u_n^2	2. $\frac{u_n}{1 + u_n}$	3. $\frac{u_n}{1 - u_n}$	4. $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$
------------	--------------------------	--------------------------	---------------------------

Exercice 3. ✱

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$. On souhaite étudier les séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- En déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
- Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$?
- On pose $v_n = -u_n + \frac{1}{n-1}$. Montrer que $v_n \sim \frac{1}{n^2}$.
- Montrer : $u_{2n} - u_{2n-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$?

2 Détermination de la somme

Exercice 4.

Déterminer la somme de la série de terme général $2^{n+1} 3^{2-n}, n \geq 0$.

Exercice 5.

Montrer que la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, pour $n \geq 2$, est convergente et calculer sa somme.

Exercice 6.

Montrer que la série de terme général $\frac{k}{(k+1)!}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 7.

On admet que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge et que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la somme de la série $\sum \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

Exercice 8.

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 9.

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'objectif de l'exercice est de mettre en évidence une technique pour calculer les sommes du type $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \frac{x^n}{n!}$, où P est un polynôme.

- Déterminer (après avoir montré son existence) la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{x^n}{n!}$.
- Même question avec $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \frac{x^n}{n!}$.
- En déduire la réponse à la question initiale dans le cas où P est de degré ≤ 2 .
- Que faire lorsque P est de degré quelconque?

3 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 10.

Étudier la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants; on précisera si besoin le type de convergence.

1. $u_n = \frac{1}{n + \ln(n)}$	7. $u_n = \left(\frac{1}{\ln 3n}\right)^n$
2. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$	8. $\frac{\ln((n+1)(n+2))}{n(n+3)}$
3. $u_n = \ln(\cos(1/2n))$	9. $u_n = \frac{e^{-2n} + n}{n^3 + 1}$
4. $u_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$	10. $u_n = \frac{\cos(n^2) + n \sin(n)}{n^2 \sqrt{n}}$
5. $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$	
6. $u_n = n \ln n e^{-\sqrt{n}}$	

Exercice 11.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Déterminer la nature de $\sum \frac{u_n}{1+n^2 u_n}$.

Exercice 12.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On suppose que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge, qu'en est-il de $\sum u_n$?

Exercice 13.

Montrer que la série de terme général $\frac{3^{n-1}}{5^{n+1}}$, $n \geq 0$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 14.

Vérifier que la série est convergente $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ et calculer sa somme.

Exercice 15.

Vérifier que la série est convergente $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}}$ et calculer sa somme.

4 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 16.**

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Que dire des séries de termes généraux $\sqrt{u_n}$ et $(-1)^n \sqrt{u_n}$?

Exercice 17. ☞☞

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite positive. On pose $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et, lorsqu'elles convergent, même somme.

Exercice 18. ☞☞(CCINP 1999)

Déterminer la nature de la série de terme général $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$.

Exercice 19. ☞☞☞☞ (Mines-Pont MP 2005)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive et $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge implique $\sum v_n$ diverge.

Que dire si $\sum u_n$ diverge ?

Exercice 20. ☞☞☞ (Mines MP 2000)

Soit $\alpha > 0$, étudier la série de terme général $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Exercice 21. ☞☞

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k$

Memo

- Comment déterminer la nature d'une série ?
 - Identifier une divergence grossière
 - Majorer le terme général positif (ou sa valeur absolue) par le t.g d'une série convergente.
 - Montrer que la somme partielle (avec t.g positif) est bornée.
 - Multiplier le terme général par n^α , $\alpha > 1$ et montrer que le tout tend vers zéro.
 - Multiplier le terme général par n^α , $\alpha \leq 1$ et montrer que le tout tend vers $+\infty$.
 - Déterminer un équivalent du terme général et conclure s'il est de signe constant.
 - Faire apparaître une somme télescopique
 - Déterminer un développement limité du terme général en espérant tomber sur un cas où l'on peut conclure (CV+CV ou DIV+CV)
- Comment déterminer la somme d'une série convergente ?
 - Reconnaître ou exprimer à l'aide d'une somme télescopique
 - Reconnaître ou exprimer à l'aide d'une somme géométrique
 - Reconnaître ou exprimer à l'aide d'une série exponentielle