

TD 17 : Intégration.

1 Manipulation

Exercice 1.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$.

1. Montrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.
2. En déduire le calcul de $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2 x} dx$.

Exercice 2.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f(0) = 1$ et $f \leq f' \leq 2f$. Encadrer $f(-1)$ et $f(1)$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. On suppose que $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt$ est constante. Montrer que f est périodique.

Exercice 4.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.
2. On suppose désormais $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

2 Stricte positivité

Exercice 5.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\left| \int_0^1 f(t) dt \right| = \int_0^1 |f(t)| dt \Leftrightarrow f \text{ est de signe constant.}$$

Exercice 6.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7.

On cherche les fonctions $f \in C^0([0, 1])$ telle que

$$\int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 f^3(t) dt = \int_0^1 f^4(t) dt. (\star)$$

1. Supposons f une telle fonction, Calculer $\int_0^1 (f^2(t) - f(t))^2 dt$.
2. En déduire l'ensemble des fonctions continues vérifiant (\star)

3 Sommes de Riemann

Exercice 8.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{-k/n}}$.

Exercice 9.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$.

Exercice 10.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$.

4 Fonction définie par une intégrale

Exercice 11.

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \\ x & \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \end{cases}$.

1. Montrer que g est impaire.
2. Calculer sa dérivée.
3. Déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice 12.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie $\varphi(t) = \frac{\text{sh } t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$. On pose $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f .
2. Déterminer le signe de f
3. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variations de f et retrouver son signe.

Exercice 13.

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t) g(t) dt.$$

1. Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)dt$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
3. Résoudre cette équation différentielle.

5 Inégalité de Taylor Lagrange

Exercice 14.

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 15.

Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Exercice 16. 🐛

Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Montrer que pour tout $x \in [-a, a]$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2a} |f(a) - f(-a)| + \frac{a^2 + x^2}{2a} \sup_{x \in [-a, a]} |f''(t)|.$$

6 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 17.

On pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \int_0^x t^n e^{-t} dt. \end{cases}$

1. Calculer $f_0(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x)$.
2. Établir une relation de récurrence entre f_n et f_{n+1} .
3. Montrer que f_n admet une limite en $+\infty$. On la note l_n .
4. Montrer que $l_n = n!$.

Exercice 18.

Déterminer un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt$.

Exercice 19.

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$. Montrer, en majorant I_n , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 20.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$$

Exercice 21.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(x) dx = 0$. On note M et m son maximum et son minimum. Montrer que $\int_0^1 f^2(t) dt \leq -mM$.

Exercice 22.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. Établir une relation liant I_n et I_{n+1} .
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \frac{e}{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ puis un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 = a$, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$. On suppose $a \neq I_0$. Montrer, en étudiant $D_n := |u_n - I_n|$ que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$.

Exercice 23.

1. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $g \geq 0$ et non identiquement nulle. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^\alpha f(t) dt$ où f est une fonction continue à droite en 0 et α est un réel différent de -1.

Exercice 24.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n}$

Exercice 25.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$.

Exercice 26.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 27.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \end{cases}$.

1. Déterminer le signe de $x \mapsto f(x) - \ln(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec ses limites.

Exercice 28.

Soit :

$$F: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt. \end{cases}$$

- Déterminer le signe de F sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

On pose g la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $g(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

- Exprimer F à l'aide de g .
- En déduire que F peut être prolongée par continuité en 0.

Exercice 29.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. On pose :

$$G: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \int_x^{2x} f(t) dt \end{cases}$$

- Montrer que G est de classe C^1 et donner la dérivée de G pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$.

7 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 30.**Soit f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(t) = t \cdot \ln(t)$.

- Étudier rapidement la fonction f .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$.

- Montrer que $\int_1^n f(t) dt \leq S_n \leq \int_1^n f(t) dt + n \ln(n)$.

- Calculer $\int_1^n f(t) dt$.

- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\prod_{k=1}^n k^k \right)^{4/n^2}$.

Exercice 31. ✨ ✨Soit f une fonction continue positive sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n =$

$$\left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n}. \text{ Montrer que la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Exercice 32. ✨Soit f continue sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_a^b t^k f(t) dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a, b[$.**Exercice 33.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ quand n tend vers $+\infty$, en utilisant les sommes de Riemann.

Exercice 34. ✨Soit f continue et positive sur \mathbb{R}^+ . On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq k \int_0^x f(t) dt$$

Montrer que f est nulle.**Exercice 35. ✨**

Soit f continue sur \mathbb{R}^+ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On définit F sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$.

Exercice 36. ✨On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \sin(xt) e^{-t^2} dt.$$

- Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, |\sin(u+\alpha) - \sin(u) - \alpha \cos(u)| \leq \frac{1}{2} \alpha^2$.
- En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R} avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^1 t \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

Exercice 37. ✨ ✨

Inégalité de Kolmogorov Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que f et f'' sont bornées et on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad ; \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

- (a) Soient $x, h \in \mathbb{R}$ avec $h > 0$. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x+h$.

(b) Montrer alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h > 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

(c) En déduire que f' est bornée.

On peut donc poser :

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|.$$

2. En utilisant la question 1.(b), établir l'inégalité :

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Memo

- Comment calculer la limite d'une intégrale?
 - L'encadrer/la majorer/la minorer
 - Utiliser une relation de récurrence
 - Faire une IPP ou un changement de variable avant de la majorer/minorer/encadrer
- Comment reconnaître une somme de Riemann et calculer sa limite?
Faire apparaître une fonction en k/n
- Comment étudier une fonction définie par une intégrale?
 - Utiliser le cours pour sa continuité/dérivabilité
 - Appliquer le théorème des accroissements finis
 - Encadrer l'intégrale

Correction du TD n 17

Correction 1

1. On pose $u = a + b - x$, on a $du = -dx$, $x = a + b - u$. On sait que x varie de a et b donc u varie de b à a . On a donc

$$\int_a^b x f(x) dx = \int_b^a (a + b - u) f(u) (-du) = (a + b) \int_a^b f(u) du - \int_a^b u f(u) du$$

$$\text{d'où } \int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

2. On applique la formule montrée à la question précédente à $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)}$. On obtient

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} [-\arctan(\cos x)]_0^\pi = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Correction 2 On divise l'inégalité par f car celle-ci est strictement positive :

$$1 \leq \frac{f'}{f} \leq 2.$$

On intègre l'inégalité entre 0 et 1, on obtient $1 \leq \ln(f(1)) \leq 2$, car $f(0) = 1$. On a donc $e \leq f(1) \leq e^2$.

Pour encadrer $f(-1)$, on intègre entre -1 et 0 . On obtient :

$$1 \leq -\ln(f(-1)) \leq 2,$$

ce qui implique :

$$e^{-2} \leq f(-1) \leq e^{-1}.$$

Correction 3 On note F une primitive de f . On sait alors, par définition de l'intégrale, que la fonction $x \mapsto F(x+T) - F(x)$ est constante. Sa dérivée est donc nulle : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) - f(x) = 0$. La fonction f est bien périodique.

Correction 4

1. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est donc bornée. Notons K un réel tel que $\forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq K$. On a alors :

$$\left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq K \int_0^1 t^n dt.$$

Comme $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, on en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

2. On fait une intégration par parties. On pose $u(x) = f(x)$ et $v'(x) = x^n$. On a $u'(x) = f'(x)$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ d'où :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[f(x) \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n f'(x) dx \\ &= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \end{aligned}$$

D'après l'exercice 4 appliqué à f' qui est continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx = 0.$$

On en déduit que $I_n \sim \frac{f(1)}{n+1}$, soit encore :

$$I_n \sim \frac{f(1)}{n}.$$

Correction 5 \Leftarrow On suppose f positive, alors $\int_0^1 f(t) dt \geq 0$ donc

$$\int_0^1 f(t) dt = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

et on a bien l'égalité souhaitée.

Si $f \leq 0$, alors $\int_0^1 f(t) dt \leq 0$ donc

$$\left| \int_0^1 f(t) dt \right| = - \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 -f(t) dt = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

et on a bien, à nouveau, l'égalité souhaitée.

\Rightarrow On raisonne par disjonction de cas :

1er cas : Si $\int_0^1 f(t) dt \geq 0$, alors

$$\int_0^1 f(t) dt = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

On en déduit que

$$\int_0^1 (|f(t)| - f(t)) dt = 0.$$

Or, la fonction $|f| - f$ est continue, positive, et d'intégrale nulle. Par stricte positivité de l'intégrale, elle est nulle. On a donc $|f| = f$ donc f est positive.

2ème cas : Si $\int_0^1 f(t) dt \leq 0$. Alors

$$\left| \int_0^1 f(t) dt \right| = - \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

On a donc

$$\int_0^1 (|f(t)| + f(t)) dt = 0.$$

Par stricte positivité de l'intégrale, on obtient $|f| + f = 0$ donc $|f| = -f$ et f est négative.

Correction 6 On pose $\varphi(t) = f(t) - t$. On a $\int_0^1 \varphi(t) dt = 0$. La fonction φ est continue. Si elle est de signe constant, elle est identiquement nulle (vu que son intégrale est nulle) et $f(x) = x, \forall x \in [0, 1]$; sinon, elle change de signe donc elle s'annule puisqu'elle est continue, ce qui montre que f admet un point fixe.

Correction 7

- On développe, par linéarité de l'intégrale, on obtient $\int_0^1 (f^2(t) - f(t))^2 dt = 0$. Or la fonction $(f^2 - f)^2$ est positive et continue. Son intégrale est nulle, la fonction est donc nulle. On en déduit que $f = f^2$. Comme f est continue, f vaut 0 ou 1.
- Réciproquement, ces deux fonctions satisfont (\star) , les fonctions satisfaisant (\star) sont donc $f \equiv 0$ et $f \equiv 1$.

Correction 8 On pose $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+e^{-k/n}} = \int_0^1 f(x) dx$.

On écrit :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2).$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+e^{-k/n}} = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

Correction 9 On écrit :

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}.$$

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$. On reconnaît alors une somme de Riemann qui converge vers $\int_0^1 \frac{dt}{x^2+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Correction 10 On pose $v_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$. On écrit les factorielles comme des produits

pour pouvoir exprimer facilement leur logarithme. On a $(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k$ et $n! = \prod_{k=1}^n k$ donc :

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n k} = \prod_{k=n+1}^{2n} k = \prod_{k=1}^n (k+n).$$

On écrit $n^n = \prod_{k=1}^n n$ d'où :

$$\frac{(2n)!}{n \cdot n^n} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} + 1\right).$$

On peut alors écrire :

$$\ln(v_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n} + 1\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n) = \int_0^1 \ln(x+1) dx = \int_1^2 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_1^2 = 2 \ln(2) - 2 + 1 = 2 \ln(2) - 1.$$

On a donc :

$$\lim v_n = e^{2 \ln(2) - 1} = 4e^{-1}.$$

Correction 11

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $g(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. On pose $u = -t$, on a $du = -dt$. Comme t varie de $-x$ à $-2x$, u varie de x à $2x$. On en déduit que :

$$g(-x) = - \int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{(-u)^4 + (-u)^2 + 1}} = -g(x),$$

car u est une variable muette. Ceci étant valable pour tout x réel, on en déduit que g est impaire.

- Elle est dérivable car les fonctions qui définissent ses bornes le sont et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

- On note F une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. On a donc :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} dt = F(2x) - F(x).$$

D'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $c_x \in]x, 2x[$ tel que :

$$F(2x) - F(x) = xF'(c_x) = x \frac{1}{\sqrt{c_x^4 + c_x^2 + 1}}$$

or, $\forall x > 0$, on a $\sqrt{c_x^4 + c_x^2 + 1} > \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ car $c_x > x$ d'où :

$$0 \leq x \frac{1}{\sqrt{c_x^4 + c_x^2 + 1}} \leq x \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

Le terme de droite tend vers 0 puisqu'il est équivalent en $+\infty$ à $\frac{1}{x}$, on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} dt = 0.$$

On peut aussi simplement utiliser la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$ pour écrire :

$$\forall x > 0, \forall t \in [x, 2], 0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}},$$

donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq g(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}},$$

et on retrouve le même encadrement.

Correction 12

1. La fonction φ est continue sur \mathbb{R} car $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 1 = \varphi(0)$, son intégrale est donc bien définie. Pour étudier la parité de f , on écrit $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \varphi(t) dt,$$

puis on fait un changement de variable dans l'intégrale : $u = -t, du = -dt$ d'où :

$$f(-x) = \int_x^{2x} -\varphi(-u) du = -\int_x^{2x} \varphi(u) du = -f(x),$$

car φ est paire. On a donc f impaire.

2. Si $x > 0, 2x > x$ donc les bornes de l'intégrale sont croissantes, φ étant positive, f est positive. Si $x < 0$, les bornes sont dans l'ordre décroissant donc f est négative.
3. La fonction f est dérivable car les fonctions qui définissent ses bornes sont dérivables. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{\text{sh}(2x) - \text{sh}(x)}{x}.$$

4. La dérivée de f est positive sur \mathbb{R}^* donc f est croissante sur \mathbb{R}^* . Comme f est continue, elle est croissante sur tout \mathbb{R} .

$$\forall x > 0, \forall t \in [x, 2x], \frac{\text{sh}(t)}{t} \geq \frac{\text{sh}(x)}{2x},$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{1}{2x} \int_x^{2x} \text{sh}(t) dt \\ &\geq \frac{1}{2x} \int_x^{2x} \text{sh}(x) dt \text{ par croissance de sh} \\ &\geq \frac{\text{sh}(x)}{2} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Par imparité de f , on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. On en déduit le tableau de variations de f :

| | | |
|--------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

On retrouve que f est négative sur \mathbb{R}_-^* et positive sur \mathbb{R}_+^* .

Correction 13

1. Il faut décomposer $\sin(x-t)$ pour avoir deux intégrales de la forme $\int_0^x h(t) dt$ avec h continue et pouvoir appliquer le théorème de dérivation d'une fonction définie par une intégrale. On écrit $\sin(x-t) = \sin x \cos t - \sin t \cos x$, on a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(x) \int_0^x \cos t g(t) dt - \cos x \int_0^x \sin(t) g(t) dt.$$

La fonction f est alors dérivable en tant que produit et somme de fonctions dérivables.

On dérive f avec l'expression que l'on vient de trouver :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \cos(x) \int_0^x \cos(t) g(t) dt + \sin(x) \cos(x) g(x) \\ &\quad + \sin(x) \int_0^x \sin(t) g(t) dt - \cos(x) \sin(x) g(x) \end{aligned}$$

d'où :

$$f'(x) = \int_0^x \cos(x) \cos(t) + \sin(t) \sin(x) dt = \int_0^x \cos(x-t) g(t) dt.$$

2. On dérive à nouveau (en utilisant l'expression développée) et on trouve :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= -\sin(x) \int_0^x \cos(t)g(t) dt + \cos(x)g(x) \\ &\quad + \cos(x) \int_0^x \sin(t)g(t) dt + \sin^2(x)g(x) \\ &= g(x) + \int_0^x \cos(x)\sin(t) - \sin(x)\cos(t) dt \\ &= g(x) + \int_0^x \sin(t-x) dt \\ &= g(x) - f(x)\end{aligned}$$

La fonction f est bien solution de $y'' + y = g(x)$.

3. L'équation caractéristique est $r^2 + 1$, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On a trouvé une solution particulière à la question précédente, on en déduit que les solutions de l'équation sont :

$$x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 14 On pose $x = 0.003 = 3 \cdot 10^{-3}$ et $f : x \mapsto \ln(1+x)$, on va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à un ordre suffisant pour que la somme donne une valeur approchée à 10^{-8} . Ce sera le cas si le majorant donné par l'inégalité de Taylor-Lagrange est inférieur à 10^{-8} .

On remarque que pour $p = 3$, on a $\max_{t \in [0, x]} f^{(3)}(t) = 1$ donc

$$\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \right| \leq \frac{x^3}{3!}$$

On a $x = 3 \cdot 10^{-3}$ donc $\frac{x^3}{3!} = \frac{27 \cdot 10^{-9}}{6} < 10^{-8}$.

Ainsi, une approximation de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près est $3 \cdot 10^{-3} - \frac{9}{2} \cdot 10^{-6} = 0.0029955$.

Correction 15 Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 :

$$|\cos(x) - 1| \leq \frac{1}{2} \sup_{[0, \frac{\pi}{2}]} |\cos^{(2)}| x^2,$$

donc

$$|\cos(x) - 1| \leq \frac{x^2}{2},$$

puis

$$-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) - 1 \leq \frac{x^2}{2}.$$

On en déduit la première inégalité.

On applique maintenant l'inégalité à l'ordre 3 :

$$\left| \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{1}{4!} \sup_{[0, \frac{\pi}{2}]} |\cos^{(4)}| x^4,$$

donc

$$\left| \cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^4}{4!},$$

puis $\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{24}$. On a bien l'autre inégalité.

Correction 16 Soit $x \in [-a, a]$. On écrit

$$|f(a) - f(x) - f'(x)(a-x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{[x, a]} |f''| |x-a|^2,$$

et

$$|f(-a) - f(x) - f'(x)(a+x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{[-a, x]} |f''| |x+a|^2.$$

On a donc :

$$|f(a) - f(x) - f'(x)(a-x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{[-a, a]} |f''| |x-a|^2,$$

et

$$|f(-a) - f(x) - f'(x)(a+x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{[-a, a]} |f''| |x+a|^2.$$

On écrit ensuite

$$\begin{aligned}|2af'(x)| &= |f'(x)(x+a) - f'(x)(x-a)| \\ &\leq |f'(x)(x+a) + f(x) - f(-a) - f'(x)(x-a) + f(a) - f(x) + f(-a) - f(a)| \\ &\leq |f'(x)(x+a) + f(x) - f(-a)| + |f(a) - f(x) - f'(x)(a-x)| + |f(-a) - f(a)| \\ &\text{par l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{[-a, a]} |f''| |x+a|^2 + \frac{1}{2} \sup_{[-a, a]} |f''| |x-a|^2 + |f(a) - f(-a)| \\ &\leq \frac{2x^2 + 2a^2}{2} \sup_{[-a, a]} |f''| + |f(a) - f(-a)|\end{aligned}$$

On en déduit que

$$|f'(x)| \leq \frac{x^2 + a^2}{2a} \sup_{[-a,a]} |f''| + \frac{1}{2a} |f(a) - f(-a)|,$$

qui est l'inégalité donnée.

Correction 17

1. On a $f_0(x) = \int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$.
2. On fait une intégration par parties en posant $u(t) = e^{-t}$ et $v'(t) = t^n$. On a $u'(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ d'où :

$$f_n(x) = \left[e^{-t} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1} dt = \frac{x^{n+1} e^{-x}}{n+1} + \frac{1}{n+1} f_{n+1}(x).$$

On a donc

3. La fonction f_n est dérivable et sa dérivée est égale à $f_n' : x \mapsto x^n e^{-x}$. Elle est positive sur \mathbb{R}^+ donc la fonction f_n est croissante et admet, par conséquent, une limite en $+\infty$ par le théorème de la limite monotone.
4. On passe à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans la relation :

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1} e^{-x}}{n+1} + \frac{1}{n+1} f_{n+1}(x).$$

Par le théorème de croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1} e^{-x}}{n+1} = 0$ d'où $l_n = \frac{1}{n+1} l_{n+1}$.
On sait que $l_0 = 1$. Par une récurrence immédiate sur n , on en déduit que $l_n = n!$.

Correction 18 On a $t \in [0, 1]$ donc $1+t \in [1, 2]$ d'où $\frac{1}{1+t} \in [\frac{1}{2}, 1]$. En multipliant par t^2 qui est positif, on obtient :

$$\forall t \in [0, 1], \frac{t^2}{2} \leq \frac{t^2}{1+t} \leq t^2.$$

En intégrant entre 0 et 1, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{2} dt \leq I \leq \int_0^1 t^2 dt$$

soit encore $\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$.

Correction 19 Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx,$$

c'est-à-dire :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème d'encadrement, on a bien $I_n \rightarrow 0$.

Correction 20 On note F une primitive de f , on applique le théorème des accroissements finis à F sur $[a, b]$: il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c) = f(c)$ d'où l'égalité souhaitée.

Correction 21 Il suffit de remarquer que la fonction $(f - M)(f - m)$ est négative, continue, donc son intégrale est négative et en développant, on obtient l'inégalité souhaitée.

Correction 22

1. On fait une intégration par parties. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x} (\ln(x))^n$. On a $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{1}{n+1} (\ln(x))^{n+1}$ d'où :

$$I_n = \left[\frac{x}{n+1} (\ln(x))^{n+1} \right]_1^e - \frac{1}{n+1} I_{n+1} = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction $x \mapsto (\ln(x))^n$ est continue, positive sur $[1, e]$ et non identiquement nulle donc $I_n > 0$. Ceci étant vrai pour tout entier, cela l'est également pour $n+1$ donc $I_{n+1} > 0$ ce qui implique :

$$\frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1} < \frac{e}{n+1}.$$

En utilisant la relation trouvée à la question précédente, on obtient :

$$0 < I_n < \frac{e}{n+1}.$$

3. On a montré à la question précédente que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encadrée entre deux suites qui tendent vers 0. Elle admet donc une limite nulle. On sait, de plus, que :

$$I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1},$$

d'où :

$$\frac{(n+1)I_n}{e} = 1 - \frac{I_{n+1}}{e}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{e} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)I_n}{e} = 1$. Ainsi, on a :

$$I_n \sim \frac{e}{n+1},$$

ce qui implique :

$$I_n \sim \frac{e}{n}.$$

4. On calcule D_{n+1} :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= |u_{n+1} - I_{n+1}| = |e - (n+1)u_n - e + (n+1)I_n| \\ &= |(n+1)(I_n - u_n)| = (n+1)|I_n - u_n| = (n+1)D_n. \end{aligned}$$

On a $D_0 = |u_0 - I_0|$. Par une récurrence immédiate sur n , on montre que $D_n = n!|u_0 - I_0|$.

Correction 23

1. Si $\int_a^b g(t) dt = 0$, alors, g étant de signe constant et continue, g est identiquement nulle ce qui est impossible, on a donc $\int_a^b g(t) dt > 0$. On note m et M respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$, on a donc $\text{Im}(f) = [m, M]$. On a alors :

$$\forall t \in [a, b], m \leq f(t) \leq M \text{ donc } mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t),$$

puisque g est positive. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt$$

ou encore :

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M.$$

(on peut diviser par l'intégrale de g car on a montré qu'elle était strictement positive)

Par le théorème des valeurs intermédiaires, f étant continue, on sait qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt}$$

d'où le résultat.

2. On applique la question précédente à $g : t \mapsto t^\alpha$. On a bien $g \geq 0$ et non identiquement nulle sur \mathbb{R}^+ . D'après la question précédente, on sait que pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que :

$$\int_0^x t^\alpha f(t) dt = f(c_x) \int_0^x t^\alpha dt = \frac{x^{\alpha+1} f(c_x)}{\alpha+1}.$$

On a donc, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^\alpha f(t) dt = \frac{f(c_x)}{\alpha+1}.$$

La fonction f étant continue à droite en 0, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [0, \eta[, |f(x) - f(0)| < \epsilon,$$

donc

$$\forall x \in [0, \eta[, |f(c_x) - f(0)| < \epsilon,$$

puisque $c_x \in]0, x[$. On en déduit que pour tout $x \in [0, \eta[$,

$$\left| \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^\alpha f(t) dt - \frac{f(0)}{\alpha+1} \right| < \frac{\epsilon}{\alpha+1}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^\alpha f(t) dt = \frac{f(0)}{\alpha+1}.$$

Correction 24 On écrit $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$. On reconnaît une somme de Rie-

mann avec $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n} = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

On a :

$$\int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{t^2+1-1 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = [t - \arctan(t)]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Correction 25 On écrit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{k}{n}}}$. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$. On

reconnait une somme de Riemann. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+2t}} = [\sqrt{1+2t}]_0^1 = \sqrt{3} - 1$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \sqrt{3} - 1$$

Correction 26 On pose $u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{\frac{1}{n}}$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k^2 + n^2) \\ &= -\ln(n^2) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k^2 + n^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(k^2 + n^2) - \ln(n^2)) \text{ car } \ln(n^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1\right). \end{aligned}$$

On reconnaît une somme de Riemann, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \int_0^1 \ln(1+t^2) dt$$

On fait une intégration par parties. On pose $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v'(t) = 1$. On a $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$

et $v(t) = t$ d'où $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = [t \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2 dt}{1+t^2}$.

On écrit :

$$\int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{t^2+1-1 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = [t - \arctan(t)]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Correction 27

1. On a $f(x) - \ln(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{(e^t - 1)}{t} dt$. La fonction intégrée est positive, le signe de $x \mapsto f(x) - \ln(x)$ dépend donc de l'ordre des bornes de l'intégrale.

Précisément :

- Pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq \ln(x)$ et
- pour tout $x < 1$, $f(x) \leq \ln(x)$.

2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* car les fonctions qui définissent ses bornes sont dérivables.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{e^x}{x}$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $x \geq 1$, on a $f(x) \geq \ln(x)$ donc, par le théorème de minoration, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, pour tout $x < 1$, on a $f(x) \leq \ln(x)$ donc, par le théorème de minoration :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -f(x) = +\infty$$

et, par suite, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Ainsi, on a le tableau de variations suivant :

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | + |
| f | $-\infty$ | $+\infty$ |

Correction 28

1. Si $x < 1$, alors $\ln t < 0$ donc :

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt < 0$$

On en déduit que :

$$F(x) = -\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt > 0$$

Si $x \geq 1$, alors $\ln t \geq 0$ donc $F(x) \geq 0$.

2. On fait un changement de variable en posant $u = \frac{1}{t}$. On a :

$$du = -\frac{dt}{t^2} \Leftrightarrow dt = -\frac{du}{u^2}.$$

d'où :

$$F(x) = \int_1^{1/x} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+1/u^2} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_1^{1/x} \frac{-\ln u}{1+u^2} du = F\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. On fait une intégration par partie. On pose :

$$u(t) = \ln t \text{ et } v'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

On a :

$$u'(t) = \frac{1}{t} \text{ et } v(t) = \arctan t.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} F(x) &= [\ln t \arctan t]_1^x - \int_1^x g(t) dt \\ &= \ln x \arctan x - \int_1^x g(t) dt. \end{aligned}$$

4. La fonction g est continue en 0 car $\arctan(x) \sim_0 0x$, la fonction $x \mapsto \int_1^x g(t) dt$ admet donc une limite finie en 0. Par ailleurs, on a :

$$\arctan(x) \sim_0 0x,$$

donc :

$$\arctan(x) \ln x \sim_0 0x \ln x.$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, par croissances comparées donc F admet une limite finie en 0, elle peut donc être prolongée par continuité en posant :

$$F(0) = -\int_1^0 g(t) dt = \int_0^1 g(t) dt.$$

Correction 29

1. La fonction f est continue sur \mathbb{R}^* et, comme $e^x - 1 \sim_0 0x$, elle est également continue en 0. On en déduit que G est bien définie. De plus, les fonctions qui définissent ses bornes sont dérivables donc G est dérivable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G'(x) = 2f(2x) - f(x),$$

donc G' est continue en tant que composée de fonctions continues. On a donc bien G de classe C^1 .

2. Pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]x, 2x[$ tel que :

$$\frac{G(x)}{2x-x} = f(c_x),$$

ce qui est équivalent à :

$$G(x) = x \frac{c_x}{e^{c_x} - 1}.$$

On sait que $c_x \in]x, 2x[$ donc :

$$\frac{1}{e^{c_x} - 1} \leq \frac{1}{e^x - 1},$$

puis :

$$\frac{c_x}{e^{c_x} - 1} \leq \frac{2x}{e^x - 1},$$

et enfin :

$$0 \leq G(x) \leq \frac{2x^2}{e^x - 1}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{e^x - 1} = 0$, d'après le théorème de croissance comparée, on en déduit, par encadrement, que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

Pour tout $x < 0$, il existe $d_x \in]2x, x[$ tel que :

$$G(x) = x \frac{d_x}{e^{d_x} - 1}.$$

On a :

$$\frac{1}{e^{d_x} - 1} < \frac{1}{e^{2x} - 1},$$

donc :

$$0 < \frac{1}{1 - e^{2x}} < \frac{1}{1 - e^{d_x}}.$$

Par ailleurs, on a :

$$0 < x^2 < x d_x,$$

d'où :

$$0 < \frac{x^2}{1 - e^{2x}} < \frac{x d_x}{1 - e^{d_x}}.$$

On a donc :

$$G(x) < \frac{x^2}{e^{2x} - 1}.$$

Le terme de droite tend vers $-\infty$. Par le théorème de majoration, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty.$$

Correction 30

- La fonction est dérivable, de dérivée $t \mapsto 1 + \ln t$, elle est donc positive sur $[1, +\infty[$, ce qui montre que f est croissante.
- Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et pour tout $x \in [k, k+1]$, on a :

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k+1),$$

donc, en intégrant entre k et $k+1$, on obtient :

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k+1).$$

On somme ces inégalités entre 1 et $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1).$$

On a $\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=2}^n f(k) = S_n$ car $f(1) = 0$. On a également :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = S_n - n \ln n.$$

L'encadrement précédent devient alors, en utilisant la relation de Chasles :

$$S_n - n \ln n \leq \int_1^n f(t) dt \leq S_n,$$

duquel on déduit :

$$\int_0^1 f(t) dt \leq S_n \leq n \ln(n) + \int_1^n f(t) dt.$$

- On fait une intégration par parties. On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = t$, on a alors $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = \frac{t^2}{2}$ d'où :

$$\begin{aligned} \int_1^n f(t) dt &= \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^n - \int_1^n \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{n^2}{2} \ln(n) - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\int_1^n f(t) dt = \frac{1}{2} n^2 \ln(n) + \frac{1}{4} - \frac{n^2}{4}.$$

- On pose $u_n = \frac{1}{n^2} \left(\prod_{k=1}^n k^k \right)^{4/n^2}$. On a :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n k \ln(k) = -2 \ln(n) + \frac{4}{n^2} S_n.$$

On reprend l'encadrement de la première question et on remplace l'intégrale par sa valeur trouvée à la question 2. On obtient :

$$\frac{1}{2} n^2 \ln(n) + \frac{1}{4} - \frac{n^2}{4} \leq S_n \leq \frac{1}{2} n^2 \ln(n) + \frac{1}{4} - \frac{n^2}{4} + n \ln(n),$$

puis

$$2 \ln(n) + \frac{1}{n^2} - 1 \leq \frac{4}{n^2} S_n \leq 2 \ln(n) + \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{4 \ln(n)}{n},$$

en multipliant par $\frac{4}{n^2}$, et enfin :

$$\frac{1}{n^2} - 1 \leq \ln(u_n) \leq \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{4 \ln(n)}{n}.$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln(n)}{n} = 0$ par le théorème de croissances comparées. On en déduit, par le théorème d'encadrement, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -1.$$

En appliquant l'exponentielle, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{e}$.

Correction 31 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $\sup f = f(x_0)$. Si $f(x_0) = 0$, le résultat est clair puisque $I_n = 0$ pour tout n . Sinon, soit $\epsilon > 0$. On le choisit suffisamment petit pour avoir $f(x_0) - \epsilon > 0$. Par continuité de f , il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a, b] \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. On note I l'intervalle $[a, b] \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on notera L sa longueur. Comme f est positive, on a

$$\int_a^b f(x)^n dx \geq \int_I f(x)^n dx,$$

donc

$$\int_a^b f(x)^n dx \geq L (f(x_0) - \epsilon)^n,$$

car $\forall x \in I$, $f(x) > f(x_0) - \epsilon$ et $f(x_0) - \epsilon > 0$. On obtient donc

$$I_n \geq L^{1/n} (f(x_0) - \epsilon).$$

Par ailleurs, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(x_0)$ donc $f(x)^n < f(x_0)^n$. On donc $I_n \leq \left(\int_a^b f(x_0)^n dt\right)^{1/n}$ c'est-à-dire

$$I_n \leq (b-a)^{1/n} f(x_0).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$L^{1/n} (f(x_0) - \epsilon) \leq I_n \leq (b-a)^{1/n} f(x_0).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} L^{1/n} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b-a)^{1/n}$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$,

$$(f(x_0) - \epsilon)(1 - \epsilon) \leq I_n \leq f(x_0)(1 + \epsilon),$$

ou encore

$$(f(x_0) - 1 + \epsilon)\epsilon \leq I_n - f(x_0) \leq \epsilon f(x_0),$$

On a montré $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = f(x_0) = \sup_{[a,b]} f(x)$.

Correction 32 On suppose, par l'absurde, que f s'annule au plus n fois sur $]a, b[$. On note $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ les points de $]a, b[$ où f s'annule ET change de signe. On a donc $r \leq n$.

On considère $g : x \mapsto \prod_{i=1}^r (x - a_i)$. Alors g s'annule et change de signe exactement aux mêmes points que f donc fg est de signe constant. Or, $r \leq n$, donc g est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n . On a donc $\int_a^b g(t)f(t) dt = 0$ par linéarité de l'intégrale. On en déduit, la fonction fg étant continue et de signe constant, que fg est nulle donc f est nulle en tout $x \neq a_i$ ce qui est une contradiction avec notre hypothèse de départ.

On a montré que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $]a, b[$.

Correction 33 On va calculer la limite de $\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha$ qui se réécrit :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$

C'est une somme de Riemann, elle tend donc vers $\int_0^1 x dx^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha = 1,$$

d'où l'équivalent souhaité.

Correction 34 On considère l'application auxiliaire $g : x \mapsto e^{-kx} \int_0^x f(t) dt$. Pour tout $x > 0$, on a

$$g'(x) = -ke^{-kx} \int_0^x f(t) dt + e^{-kx} f(x) \leq 0.$$

Or $g(0) = 0$ donc $\forall x > 0$, $g(x) \leq 0$. Comme f est positive, on a également $g \geq 0$ donc $\forall x > 0$, $g(x) = 0$ puis $\int_0^x f(t) dt = 0$. En dérivant, on obtient $f(x) = 0$, $\forall x > 0$ donc f est bien la fonction nulle.

Correction 35 Par définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt \rightarrow 0$ donc il existe A' tel que $\forall x > A'$,

$$\frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt < \epsilon.$$

Soit maintenant $x > \max(A, A')$, alors

$$\begin{aligned} |F(x) - \ell| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \ell \right| \\ &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) - \ell dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x} \int_0^A f(t) - \ell dt \right| + \left| \frac{1}{x} \int_A^x f(t) - \ell dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt + \frac{1}{x} \int_A^x |f(t) - \ell| dt \\ &\leq \epsilon + \frac{x-A}{x} \epsilon \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

On a bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$.

Correction 36

1. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à sinus entre u et $u + \alpha$, à l'ordre 1. Posons $g = \sin$, on a

$$|g(u + \alpha) - (g(u) + g'(u)(u + \alpha - u))| \leq \frac{M(u + \alpha - u)^2}{2!},$$

avec $M = \max |g^{(2)}|$. On a $M \leq 1$ et $g' = \cos$ d'où

$$|\sin(u + \alpha) - \sin(u) - \alpha \cos(u)| \leq \frac{\alpha^2}{2}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut montrer que f est dérivable en x et $f'(x) = \int_0^1 t \cos(xt) e^{-t^2} dt$.

On calcule le taux d'accroissement de f en x :

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_0^1 \sin((x+h)t) e^{-t^2} dt - \int_0^1 \sin(xt) e^{-t^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 (\sin((x+h)t) - \sin(xt)) e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

On veut montrer que la limite du taux d'accroissement de f existe et vaut $\int_0^1 t \cos(xt) e^{-t^2} dt$.

On va donc chercher à majorer la différence :

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \int_0^1 t \cos(xt) e^{-t^2} dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_0^1 (\sin((x+h)t) - \sin(xt)) e^{-t^2} dt - \int_0^1 t \cos(xt) e^{-t^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(\frac{\sin((x+h)t) - \sin(xt)}{h} - t \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(\frac{\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)}{h} \right) e^{-t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \left(\frac{\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)}{h} \right) e^{-t^2} \right| dt \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Par ailleurs, d'après la question précédente, avec $u = xt$ et $\alpha = ht$, on a

$$|\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)| \leq \frac{(ht)^2}{2},$$

donc

$$\left| \frac{\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)}{h} \right| \leq \frac{ht^2}{2}.$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \left| \left(\frac{\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)}{h} \right) e^{-t^2} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{ht^2 e^{-t^2}}{2} dt.$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $t^2 e^{-t^2} \leq 1$ donc $\int_0^1 \frac{ht^2 e^{-t^2}}{2} dt \leq \frac{h}{2}$.

On a montré :

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \int_0^1 t \cos(xt) e^{-t^2} dt \right| \leq \frac{h}{2},$$

ce qui montre que $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, égale à $\int_0^1 t \cos(xt) e^{-t^2} dt$.

On a donc bien f dérivable de dérivée $f'(x) = \int_0^1 t \cos(xt) e^{-t^2} dt$.

Correction 37

1. (a) On applique l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x+h$:

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{2}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on écrit

$$f'(x) = \frac{1}{h} (hf'(x) - f(x+h) + f(x)) + \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \left| \frac{1}{h} (hf'(x) - f(x+h) + f(x)) \right| + \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{h} (hf'(x) - f(x+h) + f(x)) \right| + \left| \frac{f(x+h)}{h} \right| + \left| \frac{f(x)}{h} \right| \end{aligned}$$

en appliquant encore l'inégalité triangulaire. En utilisant la question précédente, on obtient :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h} + \frac{M_0}{h}$$

soit encore

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2M_0}{h}.$$

(c) Ceci étant valable pour tout x (et pour tout h), on a bien f' bornée. Si vous avez un doute, vous pouvez, par exemple, prendre $h = 1$. On obtient :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2}{2} + 2M_0,$$

ce qui montre bien que f' est bornée.

2. On veut montrer l'inégalité de Kolmogorov qui majore M_1 par $2\sqrt{M_0M_2}$. On sait que pour tout x et tout $h > 0$, $f'(x) \leq \frac{M_2h}{2} + \frac{2M_0}{h}$, on a donc,

$$\forall h > 0, M_1 \leq \frac{M_2h}{2} + \frac{2M_0}{h}.$$

L'idée est de trouver une valeur de h pour laquelle on arrive à majorer $f'(x)$ par $2\sqrt{M_0M_2}$.

Essayons de voir s'il existe une valeur de h pour laquelle on a $\frac{M_2h}{2} + \frac{2M_0}{h} = 2\sqrt{M_0M_2}$. Pour cela, on va raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{M_2h}{2} + \frac{2M_0}{h} = 2\sqrt{M_0M_2} &\Leftrightarrow 4M_0 + h^2M_2 = 4h\sqrt{M_0M_2} \\ &\Leftrightarrow h^2M_2 - 4h\sqrt{M_0M_2} + 4M_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow (h\sqrt{M_2})^2 - 2(h\sqrt{M_2})(2\sqrt{M_0}) + (2\sqrt{M_0})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (h\sqrt{M_2} - 2\sqrt{M_0})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow h\sqrt{M_2} = 2\sqrt{M_0} \\ &\Leftrightarrow h = \frac{2\sqrt{M_0}}{M_2} \end{aligned}$$

Par équivalence, on a trouvé que pour $h = \frac{2\sqrt{M_0}}{M_2}$, on a $\frac{M_2h}{2} + \frac{2M_0}{h} = 2\sqrt{M_0M_2}$.

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2h}{2} + \frac{2M_0}{h}.$$

En particulier, pour $h = \frac{2\sqrt{M_0}}{M_2}$, on a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}.$$

Ainsi, ceci étant valable pour tout x , on a $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.