TD 18 : Applications linéaires.

Exercice 1.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que, $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 2.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est libre.

1 Détermination linéarité/noyau/image

Exercice 3.
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right. \qquad \varphi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$$

$$\varphi_3 \left\{ \begin{array}{ccc} C(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R}^2 \\ f & \mapsto & (\mathscr{R}e(f(0)), |f(1)|) \end{array} \right. \qquad \varphi_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(0)+P'(1) \end{array} \right.$$

$$\varphi_5 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \varphi_6 : \left\{ \begin{array}{l} C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(1/4) - \int_1^2 f(t)\,dt \end{array} \right.$$

$$\varphi_7 : \left\{ \begin{array}{l} C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(3/4) + f(5) \end{array} \right. \qquad \varphi_8 : \left\{ \begin{array}{l} C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto \left(t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^2+1} \right) \end{array} \right.$$

Exercice 4.
Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires et déterminer leur noyau et leur image quand elles le sont.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x-3$.
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x+5y$.
5. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{3x^2+5y^2}$.
6. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sin(3x+5y)$.
7. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (-x,y)$.
8. $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) : f \mapsto f'$.
9. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
10. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$.

Exercice 5.
Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P - XP' \end{array} \right.$. Montrer que l'application est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 6.
Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - XP' - P(0) \end{array} \right.$ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 7.
Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)\,dt \end{array} \right.$ est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 8.
On considère la trace $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. Déterminer son noyau et son image. On donnera une base de ces ensembles et leur dimension.

2 Injectivité/surjectivité/bijectivité

Exercice 9.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application $P \mapsto P - P'$. Montrer que c'est un automorphisme et déterminer son inverse.

Exercice 10.
Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P+P' \end{array} \right.$. Montrer que φ est linéaire. Est-elle bijective ?

Exercice 11.
Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f+f' \end{array} \right.$. L'application est-elle injective ? surjective ?

Exercice 12.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $g = id_E - f$. Montrer que g est bijective et donner son inverse.

Exercice 13.
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$. Soit a un vecteur non nul de E.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre.
   On pose $G_a = \mathrm{Vect}(a, f(a))$.
3. Montrer que G_a est stable par f (c-à-d que $\forall x \in G_a,\ f(x) \in G_a$).
4. Montrer que si un sev F stable par f contient a, alors $G_a \subset F$.

5. Si $E=\mathbb{R}^2$, donner un exemple d'endomorphisme f qui vérifie l'hypothèse de l'énoncé.

Exercice 14.
On considère l'application $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

1. Démontrer que l'application φ est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3. Démontrer que φ est surjective. L'application φ est-elle un automorphisme ?

3 Relations entre noyau et image

Exercice 15.
Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$E=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(f\circ f)$$

$$\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f\circ f)$$

Exercice 16.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f,g\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f\circ g=g\circ f$. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont stables par g.

Exercice 17.
E et F sont des $\mathbb{K}$-ev, $(u,v)\in\mathscr{L}(E,F)^2$. Comparer (au sens de l'inclusion) :

1. $\ker(u)\cap\ker(v)$ et $\ker(u+v)$.
2. $\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Im}(u+v)$.

4 Projection

Exercice 18.
On pose $F=\{P\in\mathbb{R}[X], P(0)=P(1)=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}\left(X^2+X,X^3+1\right)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer le projeté de X^5-X^3+1 sur F parallèlement à G.

Exercice 19.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, p et q des projecteurs de E tels que $p\circ q=0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $r=p+q-q\circ p$ est un projecteur.
2. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(r)=\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q) \text{ et } \mathrm{Im}(r)=\mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q)$$

5 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 20.
Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires et déterminer leur noyau et leur image quand elles le sont.

1. $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $x^2+y^2\neq 0$ et0 sinon.
2. $\mathscr{C}(\mathbb{R})\to\mathscr{C}^1(\mathbb{R}):f\mapsto\{x\mapsto e^{-x}\int_0^1 f(t)\,dt\}$.
3. $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
4. $\mathscr{C}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}:f\mapsto\max_{t\in[0,1]}f(t)$.
5. $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(x,y)\mapsto$ la solution du système : $\left\{\begin{array}{rcl}3u-v&=&x\\6u+2v&=&y.\end{array}\right.$
6. $\mathscr{C}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}:f\mapsto\int_0^1\ln(1+|f(t)|)\,dt$.
7. $\mathscr{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}:f\mapsto f'(1/2)+\int_0^1 f(t)\,dt$.

Exercice 21.
Soit $E=\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, on définit l'application φ par

$$\forall f\in E,\varphi(f)=g \text{ avec } g:x\mapsto\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 22.
Soient $a\in\mathbb{R}^\star$ et $\varphi_a:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}[X]\\P&\longmapsto&(X^2-1)P'-aXP\end{array}\right.$.

1. Montrer que φ_a est un endomorphisme et étudier le degré de $\varphi_a(P)$ en fonction du degré de P.
2. Lorsque $a\notin\mathbb{N}$, montrer que φ_a est injective. Est-ce un isomorphisme ?

Exercice 23.
Soient $F=\{P\in\mathbb{R}[X],P(1)=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}(X)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer l'image par la projection f sur F parallèlement à G de X^2-3X+1 et X^i-1, $i\in\mathbb{N}^\star$.

6 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 24.
Soient p un projecteur de E et $f=p+id_E$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer f^n en fonction de p et n

Exercice 25.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$.
2. Supposons dorénavant que $p+q$ est un projecteur, montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont en somme directe.
3. Montrer ensuite que $p+q$ est la projection de E sur $\mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Im}q$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 26.
Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un K-espace vectoriel, soient f et g deux endomorphismes de $(E, +, .)$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :
(i) $f \circ g$ est un automorphisme
(ii) f est surjective, g est injective et $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$

Exercice 27.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(f, g) \in \text{Ł}(E)^2$ tel que $f \circ g = id_E$. Déterminer $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f)$.

Exercice 28.
Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 - u^2 + u - id_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - id_E) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + id_E) = E$.

Memo

- Comment montrer qu'une application est linéaire ?
  - Utiliser la linéarité de l'intégrale, la dérivation, la somme, le produit matriciel....
  - Revenir à la définition
- Comment déterminer l'image d'une application linéaire ?
  - Prendre un élément de l'espace d'arrivée et raisonner par équivalence.
  - Trouver une inclusion puis montrer l'équivalence.
- Comment déterminer le noyau d'une application linéaire ?
  Prendre un élément de l'espace de départ et raisonner par équivalence.
- Comment déterminer si une application linéaire f est un isomorphisme ?
  - Résoudre l'équation $f(X) = Y$
  - Déterminer le noyau et l'image
- Comment montrer que p est un projecteur ?
  Montrer que p est linéaire et $p \circ p = p$
- Comment déterminer les espaces caractéristiques d'un projecteur ? Déterminer son noyau et son image

Correction du TD n 18

Correction 1 On sait que pour tout $x \in E$, il existe λ_x réel tel que $f(x) = \lambda_x x$. Montrons que λ_x ne dépend pas de x. Soient $x \in E$ non nul et α un réel, alors $f(\alpha x) = \lambda_{\alpha x} \alpha x$ et comme f est linéaire, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x$ donc, comme $x \neq 0_E$, $\lambda_x = \lambda_{\alpha x}$; autrement dit, $\lambda_x = \lambda_y, \forall y \in \mathrm{vect}(x)$.

Soit maintenant $y \notin \mathrm{vect}(x)$, alors la famille (x, y) est libre. On a :

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

d'où :

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$$

et la famille étant libre, on a $\lambda_x - \lambda_{x+y} = 0 = \lambda_y - \lambda_{x+y}$ ce qui montre que, pour tout $y \notin \mathrm{vect}(x)$, $\lambda_x = \lambda_y$. On a montré, par disjonction de cas, que :

$$\forall y \in E, \lambda_x = \lambda_y$$

donc λ_x ne dépend pas de x et f est donc bien une homothétie.

Correction 2 Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0_E$. On applique f^{n-1} à l'égalité, on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0_E$ car pour tout $k \geqslant n$, $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $f^k(x_0) = 0_E$. On a supposé $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, on a donc $\lambda_0 = 0$.

L'égalité devient $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0_E$. On applique maintenant f^{n-2} à l'égalité et on obtient $\lambda_1 f^{n-1}(x_0) = 0_E$ donc $\lambda_1 = 0$. En itérant le procédé, on montre que tous les coefficients sont nuls donc la famille est libre.

Correction 3

1. non car $\varphi_1(2,2) = 4 = 4\varphi_1(1,1) \neq 2\varphi_1(1,1) = 2$
2. non car $\varphi_2(0) = 1 \neq 0$.
3. non car $\varphi_3(f) + \varphi_3(-f) = (0, 2|f(1)|) \neq (0,0)$.
4. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi_4(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(0) + (\lambda P + Q)'(1) \\
&= \lambda P(0) + Q(0) + \left(\lambda P' + Q'\right)(1) \\
&= \lambda P(0) + Q(0) + \lambda P'(1) + Q'(1) \\
&= \lambda \underbrace{\left(P(0) + P'(1)\right)}_{=\varphi_4(P)} + \underbrace{\left(Q(0) + Q'1)\right)}_{=\varphi_4(Q)} \\
&= \lambda \varphi_4(P) + \varphi_4(Q)
\end{aligned}$$

donc φ_4 est bien linéaire.

5. non car $\varphi 5(2) = 4 \neq 2\varphi_5(1) = 2$.
6. Soit $(f, g) \in \mathscr{C}(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi_6\left(\lambda f + g\right) &= \left(\lambda f + g\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \int_1^2 \left(\lambda f + g\right) \mathrm{d}t \\
&= \lambda f\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{4}\right) - \int_1^2 \left(\lambda f(t) + g(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \lambda f\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\lambda \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&\text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \lambda f\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{4}\right) - \lambda \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \underbrace{\left(f\left(\frac{1}{4}\right) - \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{=\varphi_6(f)} + \underbrace{\left(g\left(\frac{1}{4}\right) - \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{=\varphi_6(g)} \\
&= \lambda \varphi_6(f) + \varphi_6(g)
\end{aligned}$$

φ_6 est bien linéaire

7. Soit $(f, g) \in \mathscr{C}(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi_7\left(\lambda f + g\right) &= \left(\lambda f + g\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\lambda f + g\right)(5) \\
&= \lambda f\left(\frac{3}{4}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) + \lambda f(5) + g(5) \\
&= \lambda \underbrace{\left(f\left(\frac{3}{4}\right) + f(5)\right)}_{=\varphi_7(f)} + \underbrace{\left(g\left(\frac{3}{4}\right) + g(5)\right)}_{\varphi_7(g)} \\
&= \lambda \varphi_7(f) + \varphi_7(g)
\end{aligned}$$

L'application φ_7 est donc linéaire.

8. Soit $(f, g) \in \mathscr{C}(R)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi_8(\lambda f + g)$ est l'application qui à t associe

$$\frac{(\lambda f + g)(t)}{1 + t^2}.$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_8(\lambda f+g)(t) &= \frac{(\lambda f+g)(t)}{1+t^2} \\
&= \frac{\lambda f(t)+g(t)}{1+t^2} \\
&= \lambda \underbrace{\frac{f(t)}{1+t^2}}_{=\varphi_8(f)(t)} + \underbrace{\frac{g(t)}{1+t^2}}_{=\varphi_8(g)(t)} \\
&= \lambda\varphi_8(f)(t)+\varphi_8(g)(t)
\end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions $\varphi_8(\lambda f+g)$ et $\lambda\varphi_8(f)+\varphi_8(g)$ prennent les mêmes valeurs en tout t réel, elles sont donc égales, ce qui montre que φ_8 est linéaire.

Correction 4 On note φ_i l'application linéaire de la question i.

1. non car $\varphi_1(2) = 8 \neq 2\varphi_1(1)$.
2. non car $\varphi_2(0) \neq 0$.
3. non car $\varphi_3(-1)+\varphi_3(1) \neq 0$.
4. Soit $X=(x,y)$ et $Y=(x',y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_4(\lambda X+Y) &= \varphi_4\left(\lambda x+x', \lambda y+y'\right) \\
&= 3\left(\lambda x+x'\right)+5\left(\lambda y+y'\right) \\
&= \lambda\underbrace{\left(3x+5y\right)}_{=\varphi_4(x,y)}+\underbrace{\left(3x'+5y'\right)}_{=\varphi_4(x',y')} \\
&= \lambda\varphi_4(X)+\varphi_4(Y)
\end{aligned}$$

L'application φ_4 est linéaire. On a $\mathrm{Im}\varphi_4 \subset \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, le vecteur $\left(\frac{x}{3}, 0\right)$ est un antécédent de x donc on a l'autre inclusion $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}\varphi_4$ d'où l'égalité.
On cherche maintenant à déterminer le noyau. Soit $X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}(\varphi_4) &\Leftrightarrow \varphi_4(x,y)=0 \\
&\Leftrightarrow 3x+5y=0 \\
&\Leftrightarrow 3x=-5y \\
&\Leftrightarrow y=-\frac{3}{5}x \\
&\Leftrightarrow X=x\left(1,-\frac{3}{5}\right) \\
&\Leftrightarrow X\in \mathrm{Vect}\left(1,-\frac{3}{5}\right) \\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\,(5,-3)
\end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré $\mathrm{Ker}(\varphi_4) = \mathrm{Vect}\,(5,-3)$.

5. non car $\varphi_5(-1,-1) = \varphi_5(1,1) \neq -\varphi_5(1,1)$.
6. non car $\varphi_6(3,3) \neq 3\varphi_6(1,1)$ puisque l'image du sinus est $[-1,1]$.
7. Soit $X=(x,y)$ et $Y=(x',y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_7(\lambda X+Y) &= \varphi_7\left(\lambda x+x', \lambda y+y'\right) \\
&= \left(-\left(\lambda x+x'\right), \lambda y+y'\right) \\
&= \left(-\lambda x-x', \lambda y+y'\right) \\
&= \lambda\underbrace{\left(-x,y\right)}_{=\varphi_7(x,y)}+\underbrace{\left(-x',y'\right)}_{=\varphi_7(x',y')} \\
&= \lambda\varphi_7(X)+\varphi_7(Y)
\end{aligned}$$

l'application φ_7 est donc linéaire. On a $\mathrm{Im}\varphi_7 \subset \mathbb{R}^2$. De plus, si on prend $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(x,y) = \varphi_7(-x,y)$ donc tout élément de $\mathbb{R}^2$ admet un antécédent par φ_7 ce qui montre l'autre inclusion et donc l'égalité.
Soit $X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $X \in \mathrm{Ker}(\varphi_7) \Leftrightarrow \varphi_7(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (-x,y) = (0,0) \Leftrightarrow x=y=0$. Par équivalence, on a montré $\ker(\varphi_7) = \{(0,0)\}$.

8. L'application est linéaire par linéarité de la dérivation. Toute fonction continue admet une primitive donc l'application est surjective et son image est donc l'ensemble des fonctions continues. Le noyau est l'ensemble des fonctions dont la dérivée est nulle c'est-à-dire l'ensemble des fonctions constantes.

9. Soit x et y deux réels et λ un réel. On a

$$\begin{aligned}
\varphi_9(\lambda x+y) &= \left(2\left(\lambda x+y\right), \frac{\lambda x+y}{\pi}, \sqrt{2}\left(\lambda x+y\right)\right) \\
&= \lambda\underbrace{(2x, \frac{x}{\pi}, x\sqrt{2})}_{\varphi_9(x)}+\underbrace{\left(2y, \frac{y}{\pi}, \sqrt{2}y\right)} \\
&= \lambda\varphi_9(x)+\varphi_9(y).
\end{aligned}$$

L'application est linéaire. On a $\mathrm{Im}\varphi_9 \subset \mathrm{vect}\left(2, \frac{1}{\pi}, \sqrt{2}\right)$ et tout élément de Vectvect$\left(2, \frac{1}{\pi}, \sqrt{2}\right)$ s'écrit $\left(2a, \frac{a}{\pi}, \sqrt{2}a\right)$ donc admet pour antécédent le réel a.

On cherche à déterminer les éléments qui s'envoient sur $(0,0,0)$. Il est clair que seul le réel 0 s'envoie sur $(0,0,0)$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi_9) = \{0\}$.

10. Soit x et y deux réels et λ un réel. On a :

$$\begin{aligned}\varphi_{10}(\lambda x+y) &= \ln\left(3^{(\lambda x+y)\sqrt{2}}\right)\\ &= \ln\left(3^{\lambda x\sqrt{2}+y\sqrt{2}}\right)\\ &= \ln\left(3^{\lambda x\sqrt{2}}.3^{y\sqrt{2}}\right)\\ &= \ln\left(3^{\lambda x\sqrt{2}}\right)+\ln\left(3^{y\sqrt{2}}\right)\\ &= \ln\left(\left(3^{x\sqrt{2}}\right)^{\lambda}\right)+\ln\left(3^{y\sqrt{2}}\right)\\ &= \lambda\underbrace{\ln\left(3^{x\sqrt{2}}\right)}_{=\varphi_{10}(x)}+\underbrace{\ln\left(3^{y\sqrt{2}}\right)}_{=\varphi_{10}(y)}\\ &= \lambda\varphi_{10}(x)+\varphi_{10}(y)\end{aligned}$$

donc l'application φ_{10} est linéaire. On a $\ln(3^{x\sqrt{2}}) = x\sqrt{2}\ln(3)$. Étant donné un réel y, on a $x = \dfrac{y}{\sqrt{2}\ln(3)}$ un antécédent de y par φ_{10}, l'application est donc surjective et l'image est donc égale à $\mathbb{R}$.
On a $\varphi_{10}(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{2}\ln(3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc le noyau est $\{0\}$.

Correction 5 Montrons que l'application est linéaire. Soient P_1, P_2 deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$f(\lambda P_1+P_2) = (\lambda P_1+P_2) - X(\lambda P_1+P_2)' = \lambda(P_1 - XP_1') + (P_2 - XP_2') = \lambda f(P_1) + f(P_2).$$

L'application f est bien linéaire.

Déterminons son noyau. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par équivalence :

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P = XP' \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k.$$

Par unicité des coefficients, on a :

$$f(P) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } \forall k = 1\dots n, a_k = k a_k$$

d'où :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], k \neq 1,\ a_k = 0.$$

Par équivalence, on a montré : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{vect}(X)$.

Déterminons l'image de f. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}Q \in \mathrm{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X], f(P) = Q\\ &\Leftrightarrow \exists P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k, f(P) = Q.\end{aligned}$$

On a $f(P) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k - \sum_{k=0}^{m} k a_k X^k = \sum_{k=0}^{m} (1-k) a_k X^k$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}Q \in \mathrm{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists a_k \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![0,n]\!], (1-k)a_k = b_k\\ &\Leftrightarrow b_1 = 0\end{aligned}$$

Un polynôme de $\mathrm{Im} f$ est donc de la forme $a_0 + \sum_{k=2}^{n} a_k X^k$, l'image est donc engendrée par $1, X^2, X^3, \dots$.

Correction 6 Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned}f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q) - X(\lambda P+Q)' - (\lambda P+Q)(0)\\ &= (\lambda P+Q) - X(\lambda P'+Q') - (\lambda P(0)+Q(0))\\ &= \lambda(P - XP' - P(0)) + (Q - XQ' - Q(0))\\ &= \lambda f(P) + f(Q)\end{aligned}$$

et l'application est linéaire.
Déterminons son noyau. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On raisonne par équivalence :

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 = P - XP' - P(0).$$

On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. On a donc :

$$f(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - X\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} - a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k - a_0$$

On le réécrit en enlevant le premier terme de la première somme :

$$f(P) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k X^k - \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k - a_0 = \sum_{k=1}^{n} (1-k) a_k X^k$$

Ainsi, on a, par unicité des coefficients :

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (1-k) a_k X^k \Leftrightarrow a_k = 0, \forall k = 2\cdots n \Leftrightarrow P = a_1 X + a_0.$$

Par équivalence, on a montré que le noyau est $\mathrm{Ker} f = \mathbb{R}_1[X]$.

Déterminons l'image. On cherche les polynômes Q possédant un antécédent. D'après le travail déjà effectué, on sait que :

$$Q \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^{n} (1-k) a_k X^k = Q.$$

. De tels réels existent à la condition que Q n'ait pas de coefficient constant et le coefficient devant son terme de degré 1 soit nul. Ainsi :

$$\operatorname{Im} f = \{Q \in \mathbb{R}_n[X], Q(0) = 0 = Q'(0)\}.$$

L'application n'est ni injective, ni surjective, elle n'est pas bijective.

Correction 7 L'application est clairement linéaire par linéarité de l'intégrale. Déterminons son noyau, soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (a_2t^2 + a_1t + a_0)\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0 \end{aligned}$$

Le noyau est donc l'ensemble $\left\{a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X], \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0\right\}$. Déterminons l'image, soit $a \in \mathbb{R}$, alors il est clair que le polynôme constant $P = a$ a pour image a, par conséquent, tout réel possède un antécédent par f et l'image est donc $\mathbb{R}$.

Correction 8 C'est une application linéaire et son noyau est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Cherchons à déterminer une famille génératrice de Ker(Tr). Pour cela, on se donne $M \in M_n(\mathbb{K})$ et on raisonne par équivalence. On note $M = (a_{ij})_{1\leqslant i,j,\leqslant n}$. On peut aussi écrire

$$M = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij},$$

où E_{ij} désigne la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ avec des zéros partout sauf le coefficient d'indice (i,j) qui vaut 1.

On a

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Tr}) \quad &\Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \\ &\Leftrightarrow a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} \\ &\Leftrightarrow M = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ (i,j)\neq(n,n)}} a_{ij}E_{ij} + a_{nn}E_{nn} \\ &\Leftrightarrow M = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ (i,j)\neq(n,n)}} a_{ij}E_{ij} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}E_{nn} \\ &\text{ on a remplacé } a_nn \text{ par son expression} \\ &\Leftrightarrow M = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}E_{ii} - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{nn} \\ &\text{(on coupe la somme pour faire apparaître les termes diagonaux} \\ &= M = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}(E_{ii} - E_{nn}) \\ &\Leftrightarrow M \in \operatorname{Vect}\big(\{E_{i,j}, i \neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{nn}\}\big) \end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré que Ker(Tr) est engendré par la famille $\big(E_{i,j}, i \neq j, E_{ii} - E_{nn}\big)$. De plus, cette famille est une base car les coefficients qui apparaissent dans la combinaison linéaire sont uniques (ce sont les coefficients de la matrice). On peut donc affirmer que la dimension de Ker(Tr) est $n^2 - 1$.

En effet, il y a $n^2 - n$ termes dans la première somme et $n - 1$ dans la deuxième.

L'image de Tr est un ssev de $\mathbb{R}$. On sait que $\operatorname{Im}(\mathrm{Tr}) \neq \{0\}$ (car, par exemple, $\mathrm{Tr}(I_n) = n$) donc il n'est pas réduit à 0. Comme $\mathbb{R}$ est de dimension 1, il y a nécessairement égalité, cela implique $\operatorname{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$ et Im(Tr) est donc de dimension 1.

Correction 9 Il est clair que l'application est linéaire. Soit maintenant $Q = \sum_{k=0}^{n} b_kX^k$, existe-t-il $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ tel que $P - P' = Q$? Nous allons chercher à exprimer les coefficients a_k de P en fonction des coefficients b_k de Q. On a :

$$\begin{aligned} P - P' \quad &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k - \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1} \\ &= a_nX^n + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - (k+1)a_{k+1})X^k. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a_n = b_n \text{ et } a_k - (k+1)a_{k+1} = b_k, \forall k = 0\dots n-1$$

On a $a_n = b_n$ et $b_{n-1} = a_{n-1} - na_n$ donc $a_{n-1} = b_{n-1} + nb_n$. Par ailleurs, on a $a_{n-2} - (n-1)a_{n-1} = b_{n-2}$ et $a_{n-1} - na_n = b_{n-1}$ donc

$$a_{n-2} - (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-1} - n(n-1)a_n = b_{n-2} - (n-1)b_{n-1}$$

ou encore, $a_{n-2}=b_{n-2}+(n-1)b_{n-1}+n(n-1)b_n$. Par récurrence descendante, on montre que :

$$a_{n-k}=b_{n-k}+(n-k+1)b_{n-k+1}+\ldots+n(n-1)\ldots(n-k+1)b_n=\sum_{i=0}^{k}\frac{(n-k+i)!}{(n-k)!}b_{n-k+i}$$

On a montré que pour tout polynôme $Q=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k$, il existe un unique polynôme $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ tel que $P-P'=Q$. L'application est donc bijective et sa réciproque est l'application qui envoie le polynôme $\sum_{k=0}^{n}b_kX^k$ sur $\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, avec $a_k=\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(k+i)!}{k!}b_{k+i}$.

Correction 10 Soient $(P_1,P_2)\in\mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P_1+P_2)&=(\lambda P_1+P_2)+(\lambda P_1+P_2)'\\&=(\lambda P_1+P_2)+(\lambda P_1'+P_2')\text{par linéarité de la dérivation}\\&=\lambda(P_1+P_1')+(P_2+P_2')\\&=\lambda\varphi(P_1)+\varphi(P_2)\end{aligned}$$

L'application est bien linéaire.

Soit maintenant $P=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k$, existe-t-il $Q=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ tel que $Q+Q'=P$? Si un tel Q existe, on a :

$$\begin{aligned}Q'(X)&=\sum_{k=0}^{n}ka_kX^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}\\&=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)a_{j+1}X^j\end{aligned}$$

Comme j est une variable muette, on peut écrire :

$$\begin{aligned}Q'(X)+Q(X)&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k+\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\\&=a_nX^n+\sum_{k=0}^{n-1}(a_k+(k+1)a_{k+1})X^k\end{aligned}$$

L'égalité $Q'+Q=P$ est équivalente, en identifiant les coefficients, à $a_n=b_n$ et $\forall k\in[\![0,n-1]\!]\,a_k+(k+1)a_{k+1}=b_k$.

Le polynôme P admet donc un antécédent par φ si le système suivant, d'inconnues $(a_0,\ldots,a_n)$, admet une solution :

$$\left\{\begin{array}{cccccc}a_0&+a_1&&&=&b_0\\&a_1&+2a_2&&=&b_1\\&&\ddots&&\vdots&\\&&a_{n-1}&+na_n&=&b_{n-1}\\&&&a_n&=&b_n\end{array}\right.$$

Le système est échelonné et ses pivots sont non nuls, il admet donc une unique solution. Cela montre que P admet un unique antécédent Q donc l'application φ est bijective.

Correction 11 **Injectivité** : Les éléments du noyau sont les fonctions f telles que $f+f'=0$. On a, par exemple, $x\mapsto e^{-x}$ donc le noyau n'est pas réduit à 0_E et l'application n'est pas injective.

Surjectivité : Soit $g\in E$, existe-t-il $f\in E$ telle que $f+f'=g$? Un antécédent de g est une solution de l'équation différentielle $y'+y=g$. On la résout en utilisant la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution sous la forme $x\mapsto\lambda(x)e^{-x}$. En injectant dans l'équation, on doit avoir $\lambda'(x)e^{-x}=g(x)$ c'est-à-dire $\lambda'(x)=e^xg(x)$.

La fonction $x\mapsto e^xg(x)$ est continue, elle admet donc une primitive h. La fonction $x\mapsto h(x)e^{-x}$ est alors une solution de l'équation différentielle donc un antécédent de g par φ. L'application est bien surjective.

Correction 12 On écrit :

$$\left(id_E+f+f^2+\ldots+f^{n-1}\right)\left(id_E-f\right)=id_E-f^n.$$

Comme $f^n=0_{\mathcal{L}(E)}$, l'application $h=id_E+f+f^2+\ldots+f^{n-1}$ vérifie $h\circ g=id_E$. Il est clair qu'on a également $g\circ h=id_E$ donc g est bijective et son inverse est h.

Correction 13

1. On a $f\circ(-f)=id_E$, f est donc un automorphisme (et son inverse et $-f$).
2. On suppose qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda a+\mu f(a)=0_E$. En appliquant f qui est linéaire, on obtient $\lambda f(a)-\mu a=0_E$. On a donc

$$\lambda^2a=-\lambda\mu f(a)=-\mu\lambda f(a)=-\mu^2a.$$

On a donc $(\lambda^2+\mu^2)a=0_E$. Comme $a\neq0_E$, on a $\lambda^2+\mu^2=0$ donc $\lambda=\mu=0$ et la famille est bien libre.

3. Il suffit de montrer qu'une base de G_a est stable par f, on aura alors la stabilité de G_a par linéarité de f.
D'après la question précédente, $(a, f(a))$ est libre, c'est donc une base de G_a.
— $f(a) \in G_a$
— $f(f(a)) = -a \in G_a$
donc $\forall x \in \{a, f(a)\}, f(x) \in G_a$. On en déduit que G_a est stable par f.
4. Soit F un ssev contenant a et stable par f. On a donc $f(a) \in F$ donc la famille $(a, f(a))$ appartient à F. On en déduit, comme c'est un ssev, qu'il contient G_a.
5. On prend $f : (x, y) \mapsto (-y, x)$. On a alors $f^2(x, y) = f(-y, x) = (-x, -y) = -(x, y)$ donc $f^2 = -id_{\mathbb{R}^2}$.

Correction 14

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= \varphi((\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}})\\ &= ((\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - (\lambda u_n + v_n))_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (\lambda(u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n))_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \lambda(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \lambda\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \varphi((v_n)_{n\in\mathbb{N}})\end{aligned}$$

On a donc bien φ linéaire.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On raisonne par équivalence

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker\varphi &\Leftrightarrow \varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0)_{n\in\mathbb{N}}\\ &\Leftrightarrow (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}\\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0\\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n\end{aligned}$$

On en déduit que $\ker(\varphi) = \{$ suites constantes$\}$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on cherche $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On pose $u_0 = 0$ et $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Alors $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $n = 0$, on obtient $u_1 - u_0 = u_1 = v_0$ et pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = v_n$, on a donc bien trouvé un antécédent de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par φ, l'application est bien surjective. L'application n'est pas un automorphisme puisqu'elle n'est pas injective (noyau non réduit au vecteur nul).

Correction 15

$\Rightarrow$On suppose $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Montrons $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Il est clair que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \subset E$, montrons l'autre inclusion. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, il existe $a \in E$ tel que $f(x) = f^2(a)$ ce que l'on peut réécrire $f\left(x - f(a)\right) = 0_E$. On a $x - f(a) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc :

$$x = \underbrace{x - f(a)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{f(a)}_{\in \mathrm{Im}(f)}.$$

On a bien $x \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ ce qui montre l'inclusion souhaitée et, par suite, l'égalité :

$$E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f).$$

$\Leftarrow$On suppose $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. On sait déjà que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ d'après l'exercice 25. Montrons l'inclusion réciproque. Soit donc $y \in \mathrm{Im}(f)$, montrons que $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. On sait qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $(a, b) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $x = a + b$. Comme $b \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $c \in E$ tel que $b = f(c)$, donc $x = a + f(c)$. On a alors : $y = f(a) + f^2(c) = f^2(c)$ car $a \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. On a montré l'inclusion souhaitée et donc l'égalité :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

On montre de même, l'autre équivalence par double implication.
$\Rightarrow$On suppose que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$, montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$. On sait déjà que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ f)$, montrons l'autre inclusion. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f \circ f)$, alors $f \circ f(x) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Or, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. On a supposé $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ en somme directe, on a donc $f(x) = 0_E$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, on a l'inclusion $\mathrm{Ker}(f \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
$\Leftarrow$On suppose $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$, montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, on sait que $f(x) = 0_E$ et il existe $c \in E$ tel que $x = f(c)$. On a donc $f \circ f(c) = 0_E$ c'est-à-dire $c \in \mathrm{Ker}(f \circ f)$. Or $\mathrm{Ker}(f \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ donc $c \in \mathrm{Ker}(f)$ soit $f(c) = 0_E$. On a montré $x = 0_E$ donc la somme est directe.

Correction 16

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, montrons que $g(y) \in \mathrm{Im}(f)$. On sait qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ donc $g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x)$. On a $g(x) \in E$ donc $f\left(g(x)\right) \in \mathrm{Im}(f)$ et on a montré que $g(y)$ était un élément de $\mathrm{Im}(f)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, montrons que $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. On calcule :

$$\begin{aligned}f \circ g(x) &= g \circ f(x) \text{ car } f \circ g = g \circ f\\ &= g(0_E) \text{ car } x \in \mathrm{Ker}(f)\\ &= O_E \text{ car } g \text{ est linéaire}\end{aligned}$$

On a bien $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g.

Correction 17

1. On a $\mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v)\subset\mathrm{Ker}(u+v)$. En effet, si $x\in\mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v)$, alors $u(x)=v(x)=0_E$, on a donc
$$(u+v)(x)=u(x)+v(x)=0_E+0_E=0_E.$$
2. On a $\mathrm{Im}(u+v)\subset\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$. En effet, si $y\in\mathrm{Im}(u+v)$, alors il existe $x\in E$ tel que $u(x)+v(x)=y$. On a $u(x)\in\mathrm{Im}(u)$ et $v(x)\in\mathrm{Im}(v)$ donc $y\in\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$.

Correction 18 Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$ par analyse/synthèse.
Analyse :Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, on suppose qu'il existe $(Q,R)\in F\times G$ tel que $P=Q+R$.

On sait qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $R=\lambda(X^2+X)+\mu(X^3+1)$. On a, de plus,
$$P(0)=Q(0)+\mu=\mu \text{ car } Q(0)=0,$$
et
$$P(1)=Q(1)+2\lambda+2\mu=2\lambda+2\mu \text{ car } Q(1)=1.$$
On en déduit que $\mu=P(0)$ et $\lambda=\dfrac{P(1)}{2}-P(0)$.
Synthèse :Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. On pose $\lambda=\dfrac{P(1)}{2}-P(0)$, $\mu=P(0)$, $R=\lambda(X^2+X)+\mu(X^3+1)$ et $Q=P-R$. Montrons que :
- $Q\in F$,
- $R\in G$ et
- $Q+R=P$.

Les deux derniers points sont clairs. On écrit :
$$Q(0)=P(0)-\mu=0 \text{ et } Q(1)=P(1)-2\lambda-2\mu=0,$$
ce qui montre que $Q\in F$. Par analyse/synthèse, on a montré que tout polynôme P s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. De plus, d'après la phase d'analyse, l'écriture est unique ce qui montre l'inclusion $\mathbb{R}[X]\subset F\oplus G$ d'où l'égalité.

Pour déterminer le projeté de $P=X^5-X^3+1$, on calcule $P(0)=1$ et $P(1)=1$. D'après la phase d'analyse, on peut donc écrire :
$$\begin{aligned}P &= \underbrace{P-\left(\frac{P(1)-2P(0)}{2}(X^2+X)+P(0)(X^3+1)\right)}_{\in F}\\ &\qquad+\underbrace{\left(\frac{P(1)-2P(0)}{2}(X^2+X)+P(0)(X^3+1)\right)}_{\in G}.\end{aligned}$$
Le projeté de P sur F parallèlement à G est donc :
$$X^5-X^3+1-\left(-\frac{1}{2}(X^2+X)+(X^3+1)\right)=X^5-2X^3+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}X.$$

Correction 19
1. On calcule $r\circ r$:
$$\begin{aligned}r\circ r &= (p+q-q\circ p)\circ(p+q-q\circ p)\\ &= p\circ(p+q-q\circ p)+q\circ(p+q-q\circ p)-q\circ p\circ(p+q-q\circ p)\end{aligned}$$
Or on a
— $p\circ(p+q-q\circ p)=p+0_{\mathscr{L}(E)}-0_{\mathscr{L}(E)}$ car $p\circ p=p$ et $p\circ q=0_{\mathscr{L}(E)}$.
— $q\circ(p+q-q\circ p)=q\circ p+q-q\circ p=q$ car $q^2=q$.
— $q\circ p\circ(p+q-q\circ p)=q\circ p+0_{\mathscr{L}(E)}-0_{\mathscr{L}(E)}$
On a donc
$$r\circ r=p+q-q\circ p=r,$$
donc r est bien un projecteur.
2. On a $\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)\subset\mathrm{Ker}(r)$. Si $x\in\mathrm{Ker}(r)$, alors $p(x)=q(x-p(x))$, on a $p^2(x)=p\circ q(x-p(x))=0_E$ donc $p^2(x)=p(x)=0_E$ puis $x\in\mathrm{Ker}(p)$. On a donc $r(x)=0_E=q(x)$ donc $x\in\mathrm{Ker}(q)$.
Soit $x\in\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(q)$ alors $q(x)=x$ donc $0_E=p\circ q(x)=p(x)$. Or $p(x)=x$ puisque $x\in\mathrm{Im}(p)$. On a donc $x=0_E$ et la somme est directe. On a $\mathrm{Im}(r)\subset\mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q)$ car pour tout $x\in E$,
$$r(x)=p(x)+q(x-p(x))\in\mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q)$$
Soit maintenant $x\in\mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q)$. Alors $x=p(a)+q(b)$.
On calcule $r(x)$:
$$\begin{aligned}r(x) &= p(p(a)+q(b))+q(p(a)+q(b))-q\circ p(p(a)+q(b))\\ &= p^2(a)+p\circ q(b)+q\circ p(a)+q^2(b)-q\circ p^2(a)-q\circ p\circ q(b)\\ &= p(a)+0_E+q\circ p(a)+q(b)-q\circ p(a)+0_E\\ &= p(a)+q(b)\\ &= x\end{aligned}$$
On a $r(x)=x$ donc $x\in\mathrm{Im}(r)$ ce qui montre l'inclusion réciproque.

Correction 20 On note φ_i l'application linéaire de la question i.
1. Elle n'est pas linéaire car $\varphi_1(-1,1)+-\varphi_1(1,1)\neq 0=\varphi_1(0,2)$.
2. L'application est linéaire par linéarité de l'intégrale. L'image est $\{x\mapsto\lambda e^{-x},\lambda\in\mathbb{R}\}$. En effet, on a clairement
$$\mathrm{Im}(\varphi_{12})\subset\{x\mapsto\lambda e^{-x},\lambda\in\mathbb{R}\}$$
car $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel. Pour l'inclusion réciproque, on se donne une fonction de la forme $x\mapsto e^{-x}\lambda$. Alors, l'application constante égale à λ est un antécédent

de la fonction par φ_{12} donc cette fonction appartient bien à l'image ce qui montre l'inclusion réciproque et donc l'égalité.

Pour déterminer le noyau, on se donne $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et on raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Ker}(\varphi_{12}) &\Leftrightarrow \varphi_{12}(f) = 0 \text{ (la fonction nulle)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ car l'exponentielle ne s'annule pas} \end{aligned}$$

ainsi le noyau est l'ensemble $\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)dt = 0\}$.

3. Elle n'est pas linéaire car $\varphi_3(1,0)+\varphi_3(0,1) = (1,0)+(0,1) \neq \varphi_3(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
4. non elle n'est pas linéaire car si on note $f_1 : t \mapsto 1-t$ et $f_2 : t \mapsto t$, on a $\varphi_{16}(f_1) = 1 = \varphi_{16}(f_2)$ mais $\varphi_{14}(f_1+f_2) = 1 \neq \varphi_{16}(f_1)+\varphi_{16}(f_2)$.
5. Le plus simple est de résoudre le système. On trouve que l'unique solution est $\left(\dfrac{x+y}{12}, \dfrac{y-2x}{4}\right)$. L'application associe donc à (x,y) le couple $\left(\dfrac{x+y}{12}, \dfrac{y-2x}{4}\right)$, elle est linéaire.

   Le système étant inversible, l'application est bijective (sa bijection réciproque vaut $(u,v) \mapsto (3u-v, 6u+2v)$. On en déduit que l'unique antécédent de $(0,0)$ est $(0,0)$ donc oui, $\ker\varphi_{17} = \{(0,0)\}$ et, comme elle est surjective, $\operatorname{Im}\varphi_{15} = \mathbb{R}^2$.
6. non elle n'est pas linéaire car si on prend la fonction constante $f = 1$, on a $\varphi_6(-f) = \ln(2) = \varphi_6(f)$ donc $\varphi_6(-f) \neq -\varphi_{19}(f)$.
7. La linéarité se montre facilement, le noyau est l'ensemble des fonctions telles que $f'(1/2)+\int_0^1 f(t)dt = 0$, l'image est $\mathbb{R}$ car tout réel λ admet pour antécédent la fonction constante égale à λ.

Correction 21 On commence par regarder la linéarité. Soit f, h deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(\lambda f + h)$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f+h)(x) = \int_0^x t\big(\lambda f(t)+h(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f+h)(x) = \lambda\varphi(f)(x)+\varphi(h)(x)$ donc $\varphi(\lambda f+h) = \lambda\varphi(f)+\varphi(h)$. On en déduit que φ est linéaire.

Par ailleurs, la fonction $\varphi(f)$ est dérivable, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ donc φ est bien un endomorphisme de E.

Pour savoir s'il est injectif, on regarde son noyau. Soit $f \in E$ telle que $\varphi(f) \equiv 0$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Notons F une primitive de $t \mapsto tf(t)$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(0) = 0,$$

donc F est constante. Comme elle est dérivable, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 0$ donc $xf(x) = 0$. On obtient $\forall x \in \mathbb{R}^\star, f(x) = 0$ et comme f est continue, elle est nulle sur tout $\mathbb{R}$. On a montré que le noyau de φ est réduit à la fonction nulle donc φ est injective.

Elle ne peut pas être surjective car l'image de φ est inclus dans l'ensemble des fonctions dérivables (et pas seulement continues). Si on suppose, par exemple, que la valeur absolue admet un antécédent f par φ, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = |x|.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(f)'(x) = 0.f(0)0$. Pourtant, $\dfrac{|x|}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

Correction 22

1. On doit montrer que φ_a est linéaire. On se donne donc deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer que

$$\varphi_a(\lambda P + Q) = \lambda\varphi_a(P) + \varphi_a(Q).$$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi_a(\lambda P+Q) &= (X^2-1)(\lambda P+Q)'(X) - aX(\lambda P+Q) \\ &= (X^2-1)\left(\lambda P'+Q'\right)(X) - aX(\lambda P+Q) \\ &= \lambda(X^2-1)P' + (X^2-1)Q' - \lambda aXP - aXQ \\ &= \lambda\underbrace{\left((X^2-1)P' - aXP\right)}_{=\varphi_a(P)} + \underbrace{\left((X^2-1)Q' - aXQ\right)}_{=\varphi_a(Q)} \\ &= \lambda\varphi_a(P) + \varphi_a(Q) \end{aligned}$$

L'application φ_a est bien linéaire, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Pour déterminer le degré de $\varphi_a(P)$ en fonction de P, on écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$ (et donc $\deg(P) = n$).

On a $P'(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. On remarque que le terme de plus haut degré de $\varphi_a(P)$ sera égal à $na_nX^{n+1} - aa_nX^{n+1}$. Si $a \neq n$, on a alors $(n-a)a_n \neq 0$ et $\deg(\varphi_a(P)) = \deg(P)+1$. Si $a = n$, on peut simplement dire que $\varphi_a(P) \leqslant \deg(P)$ mais on ne peut donner précisément son degré. En effet, le terme en X^n vaudra $(n-1-a)a_{n-1}X^n$ et on ne sait pas si a_{n-1} est nul ou non (contrairement à a_n que l'on sait être non nul car c'est le terme dominant de P).

2. On suppose $a \notin \mathbb{N}$, on a donc, pour tout polynôme $P \neq 0$, $\varphi_a(P) = \deg(P) + 1 \geqslant 1$. Ainsi, seul le polynôme nul s'envoie sur 0, le noyau de φ_a est donc réduit à $\{0\}$ ce qui montre que φ_a est injectif.

   Pour autant, φ_a n'est pas bijectif car un polynôme constant non nul n'admet pas d'antécédent par φ_a. En effet, $\forall P \neq$, on a $\deg(\varphi_a(P)) \geqslant 1$ donc $\deg(\varphi_a(P))$ n'est jamais nul.

   Si on anticipe sur les applications en dimension finie, cette situation (endomorphisme injectif mais non bijectif) ne peut se produire qu'en dimension infinie.

Correction 23

1. Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   Analyse :Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe $Q \in F$ et $\lambda X \in G$ tels que $P = Q + \lambda X$. On a alors :
$$\begin{aligned} P(1) &= \lambda + Q(1) \\ &= \lambda \text{car } Q(1) = 0 \end{aligned}$$
   On a donc $\lambda = P(1)$.
   Synthèse :Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a alors :
$$P = \underbrace{P(1)X}_{\in G} + \underbrace{(P - XP(1))}_{\in F \text{ car } P(1) - 1P(1)}.$$
   On a montré que tout élément P de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. De plus, l'unicité de l'écriture a été montrée dans la phase d'analyse. On a donc l'inclusion $\mathbb{R}[X] \subset F \oplus G$ d'où l'égalité.
   Les deux espaces sont donc bien supplémentaires.
2. On cherche à écrire $X^2 - 3X + 1$ comme la somme $P(X) + \lambda X$ avec $P(1) = 0$. D'après la phase d'analyse, on a $\lambda = P(1) = -1$. On en déduit que :
$$P(X) = (X^2 - 3X + 1) + X = X^2 - 2X + 1.$$
   On peut alors conclure :
$$f(2X^2 - 3X + 3) = X^2 - 2X + 1.$$
   On a, $\forall i \geqslant 1$, $X^i - 1 \in F$ d'où $f\left(X^i - 1\right) = X^i - 1$.

Correction 24

1. **Injectivité** : Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_E$. Alors $p(x) = -x$. On applique p à l'égalité. On obtient, par linéarité de p, $p^2(x) = -p(x)$. Or, p est un projecteur donc $p^2(x) = p(x)$. On en déduit que $p(x) = 0_E$ et, comme, par hypothèse, $p(x) = -x$, alors $x = 0_E$. Ainsi, f est injective.
   Surjectivité : On va raisonner par analyse/synthèse.
   Analyse :Soit $y \in E$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $p(x) + x = y$. On a alors $p^2(x) + p(x) = p(y)$ c'est-à-dire, comme on sait que $p^2 = p$, $2p(x) = p(y)$ ou encore $p(x) = \frac{1}{2}p(y)$. Or, on sait que $x = y - p(x)$ donc $x = y - \frac{p(y)}{2}$.
   Synthèse :Soit $y \in E$. On pose $x = y - \frac{p(y)}{2}$. On a alors :
$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + x \\ &= p\left(y - \frac{p(y)}{2}\right) + y - \frac{p(y)}{2} \\ &= p(y) - \frac{p^2(y)}{2} + y - \frac{p(y)}{2} \\ &= p(y) - \frac{p(y)}{2} + y - \frac{p(y)}{2} \\ &= y \end{aligned}$$
   et x est un antécédent de y par f. Pour tout $y \in E$, on a bien un antécédent de y par f donc f est surjective.
2. Les applications p et id_E commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :
$$\begin{aligned} (p + id_E)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^k (id_E)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^k \\ &= id_E + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} p^k \\ &= id_E + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n}\right) p \text{car } p^k = p \text{ pour tout } k \geqslant 1 \end{aligned}$$
   On sait, de plus, que $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n}\right) - 1 = 2^n - 1$. On a donc :
$$f^n = id_E + \left(2^n - 1\right) p.$$

Correction 25

1. Supposons tout d'abord que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$, alors :
$$(p + q) \circ (p + q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p^2 + q^2 = p + q$$

et l'application $p+q$ est bien un projecteur.
Réciproquement, supposons que $p+q$ soit un projecteur, on sait alors que $(p+q)\circ(p+q)=p+q$, ce qui implique, d'après le calcul précédent,

$$p\circ q+q\circ p=0_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}.$$

En composant à droite par p cette égalité, on obtient :

$$p\circ q\circ p+q\circ p^2=p\circ q\circ p+q\circ p=0_{\mathscr{L}(\mathscr{E})},$$

car p est un projecteur. De même, en composant à gauche par p, on obtient :

$$p^2\circ q+p\circ q\circ p=p\circ q+p\circ q\circ p=0_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}.$$

Cela implique $p\circ q=q\circ p$ or $p\circ q+q\circ p=0_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$, on obtient donc :

$$p\circ q=q\circ p=0_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}.$$

2. Soit $x\in \mathrm{Im}p\cap\mathrm{Im}q$, alors il existe $a,b\in E$ tels que $q(a)=p(b)=x$. Composons par p, on obtient, d'après la question précédente :

$$p(x)=p\circ q(a)=0_E.$$

Or $p(x)=p^2(b)=p(b)$ donc $x=0_E$ et l'intersection est réduite à zéro.

3. On veut montrer que $\mathrm{Im}(p+q)=\mathrm{Im}p\oplus\mathrm{Im}q$ et $\mathrm{Ker}(p+q)=\mathrm{Ker}p\cap\mathrm{Ker}q$.
On a $\mathrm{Im}(p+q)\subset\mathrm{Im}p+\mathrm{Im}q$ pour toutes applications, il suffit donc de montrer l'inclusion inverse. On se donne un élément x de $\mathrm{Im}p\oplus\mathrm{Im}q$, il s'écrit $x=p(a)+q(b)$ avec $a,b\in E$. On a :

$$p(x)=p^2(a)+p\circ q(a)=p(a) \text{ car } p\circ q=0_{Ł(E)}$$

et

$$q(x)=q^2(b)+q\circ p(a)=q(b) \text{ car } q\circ p=0_{Ł(E)}$$

donc $x=p(x)+q(x)=(p+q)(x)$ et l'inclusion réciproque est montrée.

Pour le noyau, on a l'inclusion $\mathrm{Ker}p\cap\mathrm{Ker}q\subset\mathrm{Ker}(p+q)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x\in\mathrm{Ker}(p+q)$, alors :

$$\begin{aligned} p(x) &= p^2(x)\\ &= p(-q(x))\text{car } p(x)=-q(x)\\ &= -p\circ q(x)\\ &= 0_E\text{car } p\circ q=0_{Ł(E)}\end{aligned}$$

donc $x\in\mathrm{Ker}p$. De même, $q\circ p(x)=0_E=-q^2(x)=-q(x)$ donc $x\in\mathrm{Ker}q$.
Au final, on a montré $x\in\mathrm{Ker}p\cap\mathrm{Ker}q$ ce qui montre l'inclusion réciproque.

Correction 26 On raisonne par double implication. $\Rightarrow$On suppose $f\circ g$ un automorphisme, on a f surjective et g injective d'après le cours sur les fonctions. Je vous le refais dans l'hypothèse improbable où vous auriez oublié : Soit $y\in E$, comme $f\circ g$ est un automorphisme, y admet un antécédent (unique) par $f\circ g$ donc il existe $x\in E$ tel que $f\circ g(x)=y$. On a alors $y=f\left(g(x)\right)$ avec $g(x)\in E$ donc y admet un antécédent par f et f est surjective.

Montrons que g est injective. Soit $x\in\mathrm{Ker}(g)$, alors $g(x)=0_E$ donc $f\circ g(x)=f(0_E)=0_E$. Or $f\circ g$ est bijective donc injective. On en déduit que $x=0_E$ ce qui achève de montrer que g est injective.

Pour la somme, on raisonne par analyse synthèse :
<u>Analyse</u> :Soit $x\in E$, on suppose qu'il existe $(a,b)\in\mathrm{Ker}(f)\times\mathrm{Im}(g)$, alors $f(a)=0_E$ et il existe $c\in E$ tel que $b=g(c)$. On a $f(x)=f(b)=f\circ g(c)$, d'où $x-g(c)\in\mathrm{Ker}(f)$ par linéarité de f et on remarque que c est l'unique antécédent de $f(x)$ par $f\circ g$.
<u>Synthèse</u> :Soit $x\in E$, on pose c l'unique antécédent de $f(x)$ par $f\circ g$, $b=g(c)$ et $a=x-b$. On doit montrer que

— $a\in\mathrm{Ker}(f)$
— $b\in\mathrm{Im}(g)$
— $a+b=x$.

les deux derniers points sont clairs, on calcule $f(a)=f(x-b)=f(x)-f(b)=f(x)-f\circ g(c)=0_E$ donc le premier point est vrai.

On a montré, que tout élément de E s'écrit comme la somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'un élément de $\mathrm{Im}(g)$. De plus, d'après la phase d'analyse, cette écriture est unique donc $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E.

$\Leftarrow$Réciproquement, si $E=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(g)$, f surjective et g injective, montrons que $f\circ g$ est un automorphisme.

Soit $x\in\mathrm{Ker}(f\circ g)$, alors $f\circ g(x)=0_E$ donc $g(x)\in\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0_E\}$, puis g injective donc $x=0_E$. On a donc $f\circ g$ injective.

Soit $y\in E$, alors comme f est surjective, $y=f(a)$. Or $a\in E$ donc $a=b+c$ avec $c\in\mathrm{Im}(g)$, on a donc $c=g(d)$ puis $y=f\circ g(d)$ donc y admet un antécédent dans E.

On a bien $f\circ g$ un automorphisme.

Correction 27 Montrons tout d'abord que $f\circ g=id_E$ implique f surjective et g injective. Soit $x\in E$, alors $x=f\circ g(x)=f(g(x))$ donc $g(x)$ est un antécédent de x par f ce qui montre que f est surjective.
Soit $x\in\mathrm{Ker}(g)$, alors $g(x)=0_E$ d'où $f\circ g(x)=f(0_E)=0_E$ par linéarité de f. Or $f\circ g(x)=x$ donc $x=0_E$ et g est injective.

Montrons maintenant que $\mathrm{Im}(g\circ f)=\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g\circ f)=\mathrm{Ker}(f)$ par double inclusion.

On sait que $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(g\circ f)$ d'après le cours. Montrons les inclusions réciproques.

Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$, alors il existe $a \in E$ tel que $g(a) = y$. Or f est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) = a$. On a alors $y = g \circ f(x)$ donc $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ et on a montré l'inclusion $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$ d'où l'égalité :

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f).$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Alors $g \circ f(x) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. Comme g est injective, on a $\mathrm{Ker}(g) = \{0_E\}$ et $f(x) = 0_E$. Ceci montre que $x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc on a l'inclusion $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et, par suite,

$$\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f).$$

Correction 28 On raisonne par analyse synthèse :
Analyse :Soit $x \in E$, on suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathrm{Ker}(u - id_E) \times \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$ tel que $x = a + b$. On a $(u - id_E)(a) = u(a) - a$ donc $u(a) = a$ puisque $a \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$.
On a aussi $(u^2 + id_E)(b) = u^2(b) + b$ donc $u^2(b) = -b$ puisque $b \in \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$. On a

$$\begin{aligned} u^2(x) &= u^2(a) + u^2(b) \text{ par linéarité de } u^2 \\ &= u(a) - b \text{ car } u(a) = a \\ &= a - b \text{toujours car } u(a) = a \end{aligned}$$

Ainsi, on a $a = \frac{1}{2}(x + u^2(x))$ et $b = \frac{1}{2}\left(x - u^2(x)\right)$.

Synthèse :Soit $x \in E$, on pose $a = \frac{1}{2}(x + u^2(x))$ et $b = \frac{1}{2}\left(x - u^2(x)\right)$. On doit montrer que

— $a + b = x$
— $a \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$
— $b \in \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$.

Le premier point est clair.
Calculons $u(a)$:

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{2}\left(u(x) + u^3(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u(x) + u^2(x) - u(x) + x\right) \text{ car } u^3 = u^2 - u + Id_E \\ &= \frac{1}{2}\left(u^2(x) + x\right) \\ &= a \end{aligned}$$

On a bien $a \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$.
On veut montrer que $u^2(b) = -b$, on calcule $u(b)$ puis $u^2(b)$:

$$\begin{aligned} u(b) &= \frac{1}{2}\left(u(x) - u^3(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u(x) - u^2(x) + u(x) - x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2u(x) - u^2(x) - x\right) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} u^2(b) &= \frac{1}{2}\left(2u^2(x) - u^3(x) - u(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2u^2(x) - u^2(x) + u(x) - x - u(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u^2(x) - x\right) \\ &= -b \end{aligned}$$

On a bien $b \in \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$. On a montré que tout élément de E s'écrit comme la somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$. De plus, d'après la phase d'analyse, cette écriture est unique, les deux espaces sont donc supplémentaires dans E.

On peut aussi aller plus rapidement en remarquant que $(u - Id_E) \circ (u^2 + Id_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $(u^2 + Id_E) \circ (u - Id_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On a donc $\mathrm{Im}(u - Id_E) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$ et $\mathrm{Im}(u^2 + Id_E) \subset \mathrm{Ker}(u - Id_E)$.

On écrit ensuite, pour tout $x \in E$, $u^3(x) - u^2(x) + u(x) - x = 0_E$ donc

$$2x = (u^3(x) + u(x) - 2u^2(x)) + (x + u^2(x)).$$

On a $x + u^2(x) \in \mathrm{Im}(u^2 + Id_E)$ donc $x + u^2(x) \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$.
On a aussi

$$u^3(x) - 2u^2(x) + u(x) = u^3(x) - u^2(x) - (u^2(x) - u(x)) = (u - Id_E)(u^2(x) - u(x)) \in \mathrm{Im}(u - Id_E) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E).$$

On montre ensuite que la somme est directe en prenant un élément de l'intersection.