Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2025-2026
DS 7 — Durée : 4h

Devoir surveillé 7, sujet 2 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1. Une puce effectue des sauts aléatoires sur les trois sommets d'un triangle ABC. À chaque saut, elle peut soit sauter sur place, soit sauter vers un des deux autres sommets. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

— A_n l'événement « après le n-ième saut, la puce est au point A » et $a_n = P(A_n)$;
— B_n l'événement « après le n-ième saut, la puce est au point B » et $b_n = P(B_n)$;
— C_n l'événement « après le n-ième saut, la puce est au point C » et $c_n = P(C_n)$.

On notera que a_0 (respectivement b_0, c_0) sont les probabilités pour que la puce se trouve en A (respectivement en B, en C) au début de l'expérience.

Si M et N sont deux points parmi A, B, C, on note p_{MN} la probabilité pour que le saut s'effectue de M vers N.

1. (a) Justifier soigneusement que $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, en justifiant soigneusement, que $a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n$. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Dans cette question (et seulement dans cette question), on suppose que $p_{MN} = \alpha$ pour tous points $M, N \in \{A, B, C\}$ tels que $M \neq N$.
   (a) Montrer que $p_{MM} = 1 - 2\alpha$ pour tout $M \in \{A, B, C\}$.
   (b) Montrer que $a_{n+1} = (1 - 3\alpha)a_n + \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire une expression de a_n en fonction de n et de a_0.
   (d) Étudier la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Dans cette question, on suppose que $p_{AA} = 1$, $p_{BA} = p_{BB} = \frac{1}{2}$ et $p_{CA} = p_{CB} = p_{CC} = \frac{1}{3}$.
   (a) Comment interpréter la condition $p_{AA} = 1$?
   (b) Déterminer les valeurs p_{MN} manquantes.
   (c) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire une expression de c_n en fonction de n et de c_0. Quelle est la limite de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (d) Montrer que $b_{n+2} = \frac{5}{6}b_{n+1} - \frac{1}{6}b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (e) Quelle est la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Le but de l'exercice est de calculer P_n

1. Calculer P_2, P_3 .
2. Soit $m \in \mathbb{N}^\star$, déterminer le quotient de Q_m de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X - 1$.
3. En déduire les racines de Q_m.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$**, on définit le polynôme** $A_n = \sum_{k=0}^{2n-1} (1+X)^k$

4. On note α_k les racines de A_n pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$. Calculer α_k et déterminer le réel $\theta_{k,n}$ tel que
$$\alpha_k = 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) exp(i\theta_{k,n})$$
5. Montrer que
$$\prod_{k=1}^{2n-1} \alpha_k = -2n$$
6. Prouver que $\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2$
7. Calculer $\sum_{k=1}^{2n-1} \theta_{k,n}$
8. En déduire finalement que $P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

Exercice 3. Soit
$$E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 4u_n\right\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit H l'ensemble des suites constantes. H et E sont-ils en somme directe ?
3. Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, montrer qu'il existe trois suites (X, Y, Z) telles que
$$U = u_0 X + u_1 Y + u_2 Z$$
Ne donnez que les 5 premiers termes de ces suites .
4. Factoriser le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4$.
5. Montrer que E ne contient que deux suites géométriques $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x \in \mathbb{C}^\star$.
6. Soit $A = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $B = \left(n2^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $C = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Montrer que $\mathscr{L} = (A, B, C)$ est une famille libre .
7. Montrer que $X \in \mathrm{Vect}(A, B, C)$.
   On admet que l'on montre de la même manière que Y et Z appartiennent à $\mathrm{Vect}(A, B, C)$.
8. Montrer que $\mathscr{L}$ est une base de E.
9. Soit $(u_n) \in E$ telle que $u_0 = 5$, $u_1 = 0$, $u_2 = 7$. Donner une expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. On pose $F = \mathrm{Vect}(A, B)$.
    (a) Donner un supplémentaire de F dans E.
    (b) Donner un autre supplémentaire de F dans E.

Exercice 4. Pour $n \geqslant 2$ entier naturel, et x réel, on note :

$$P_n(x) = x^n + x - 1.$$

On définit ainsi une fonction polynomiale P_n, dérivable sur $\mathbb{R}$. On souhaite étudier les zéros de P_n dans $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée P_n' de P_n.
2. On suppose dans cette question que n est impair. Montrer que P_n définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En déduire l'existence d'un unique réel β_n, vérifiant $0 < \beta_n < 1$, tel que $Pn(\beta_n) = 0$.
3. On suppose dans cette question que n est pair.
   (a) Montrer que P_n' s'annule en un unique réel α_n.
   (b) Vérifier que l'équation $\alpha_n^{n-1} = -\dfrac{1}{n}$ est satisfaite et préciser le signe de α_n.
   (c) Montrer la relation $P_n(\alpha_n) = \dfrac{n-1}{n}\alpha_n - 1$ et en déduire le signe de $P_n(\alpha_n)$.
   (d) Dresser le tableau de variations de P_n.
   (e) En déduire qu'il existe un unique réel $1 > \beta_n > 0$ tel que $P_n(\beta_n) = 0$.
4. On s'intéresse maintenant à la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$, où β_n désigne, pour tout n, l'unique racine positive de P_n. On a montré dans les questions précédentes que $\beta_n \in]0,1[, \forall n$.
   (a) Montrer la relation $P_{n+1}(\beta_n) = -(\beta_n - 1)^2$.
   (b) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.
   (c) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une limite appartenant à $]0,1]$, qu'on notera l.
5. On se propose maintenant de déterminer la valeur de l. On note $L = 1 - l$
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n^n = L$.
   (b) On suppose par l'absurde que $L \neq 0$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln \beta_n = \ln L$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln \beta_n = 0$.
   (c) Conclure.

Correction du DS n 7

Correction 1 1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les événements A_n, B_n, C_n forment un système complet donc, en particulier, $P(A_n)+P(B_n)+P(C_n)=1$, c'est-à-dire $\boxed{a_n+b_n+c_n=1.}$

Il est écrit "soigneusement" donc "ça recouvre tous les cas possibles" n'est pas acceptable.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calculer $a_{n+1}=P(A_{n+1})$ à l'aide de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n). Cela donne

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$$

c'est-à-dire précisément $\boxed{a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n.}$ On obtient de même

$$\boxed{b_{n+1} = p_{AB}a_n + p_{BB}b_n + p_{CB}c_n} \text{ et } \boxed{c_{n+1} = p_{AC}a_n + p_{BC}b_n + p_{CC}c_n.}$$

Là encore, on attend la formule des probabilités totales en citant le SCE utilisé.

2. (a) Soit $M \in \{A, B, C\}$. Depuis la lettre M, les seules possibilités de déplacement pour la puce sont M, M', M'' où M' et M'' sont les deux autres lettres. Donc $p_{MM}+p_{MM'}+p_{MM''}=1$ et donc $2\alpha + p_{MM}=1$. Ainsi, $\boxed{p_{MM}=1-2\alpha.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 1°)b), on a

$$a_{n+1} = (1-2\alpha)a_n + \alpha b_n + \alpha c_n = (1-2\alpha)a_n + \alpha(b_n+c_n).$$

Or $a_n+b_n+c_n=1$, donc $b_n+c_n=1-a_n$. Il en résulte que

$$\boxed{a_{n+1} = (1-3\alpha)a_n + \alpha.}$$

Vous n'avez pas le droit de changer l'énoncé et de noter, par exemple, P_{MN} l'évènement " être en M et changer de sommet"

(c) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_n + \lambda$ soit géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} + \lambda \\ &= (1-3\alpha)a_n + \alpha + \lambda \\ &= (1-3\alpha)(u_n - \lambda) + \alpha + \lambda \\ &= (1-3\alpha)u_n + \alpha(1+3\lambda). \end{aligned}$$

On prend donc $\lambda = -\dfrac{1}{3}$. On a alors $u_n = u_0 \times (1-3\alpha)^n = \left(a_0 - \frac{1}{3}\right) \times (1-3\alpha)^n$ et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \boxed{a_n = u_n - \lambda = \left(a_0 - \frac{1}{3}\right) \times (1-3\alpha)^n + \frac{1}{3}.}$$

(d) Comme $1-3\alpha \in]-1,1[$ (car $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$), on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-3\alpha)^n = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{3}.}$

3. (a) La condition $p_{AA}=1$ signifie que le point A est « collant » : si la puce y passe, elle y reste !

(b) On a $p_{BA}+p_{BB}+p_{BC}=1$ donc $\boxed{p_{BC}=0.}$ De plus, $\boxed{p_{AB}=p_{AC}=0}$ puisque ce sont des quantités positives et que $p_{AA}=1$. On peut aussi dire que ces évènements sont impossibles puisque la puce, une fois en A, ne change pas de sommet.

(c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$c_{n+1}=p_{AC}a_n+p_{BC}b_n+p_{CC}c_n=\frac{1}{3}c_n$$

donc $\boxed{\text{la suite } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{3}.}$ On en déduit que $\boxed{c_n=c_0\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $\frac{1}{3}\in\,]-1,1[$, on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty}c_n=0.}$

(d) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$b_{n+1}=p_{AB}a_n+p_{BB}b_n+p_{CB}c_n=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{3}c_n,$$

et

$$b_{n+2}=p_{AB}a_{n+1}+p_{BB}b_{n+1}+p_{CB}c_{n+1}=\frac{1}{2}b_{n+1}+\frac{1}{3}c_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{6}c_n+\frac{1}{9}c_n=\frac{1}{4}b_n+\frac{5}{18}c_n.$$

donc

$$b_{n+2}-\frac{5}{6}b_{n+1}+\frac{1}{6}b_n=\left(\frac{1}{4}b_n+\frac{5}{18}c_n\right)-\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{3}c_n\right)+\frac{1}{6}b_n=0$$

donc $\boxed{b_{n+2}=\frac{5}{6}b_{n+1}-\frac{1}{6}b_n.}$ La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $\lambda^2-\frac{5}{6}\lambda+\frac{1}{6}=0$. Son discriminant est $\Delta=\left(-\frac{5}{6}\right)^2-4\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=\left(\frac{1}{6}\right)^2$. Les deux solutions sont

$$\lambda_1=\frac{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}{2}=\frac{1}{2}\text{ et }\lambda_2=\frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}}{2}=\frac{1}{3}.$$

On en déduit qu'il existe $A,B\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$b_n=A\lambda_1^n+B\lambda_2^n.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs de A et B puisqu'on nous demande seulement la valeur de la limite de b_n.

Comme $\lambda_1,\lambda_2\in\,]-1,1[$, on peut en déduire que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}b_n=0.}$

(e) On sait que $a_n+b_n+c_n=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et on vient de montrer que les suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers 0. On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}a_n=1.}$

Correction 2

1. On a $P_2=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $P_3=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$. On a donc $\boxed{P_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ et }P_3=\frac{\sqrt{3}}{4}.}$

   Faut-il parler de ceux qui ont calculé la somme au lieu du produit ? (oui, ils sont plusieurs)

2. On a $X^m-1=(X-1)\sum_{k=1}^{m-1}X^k$, on a donc $\boxed{Q(X)=\sum_{k=1}^{m-1}X^k}$.

   C'est une formule du cours (a^n-b^n) donc pas de preuve à donner.

3. Les racines de X^m-1 sont $e^{\frac{2ik\pi}{m}}$, $k\in[\![0,m-1]\!]$. On enlève 1 qui correspond à $k=0$ et on en déduit que les racines de $\sum_{k=1}^{m-1}X^k$ sont

$$\boxed{\left\{e^{\frac{2ik\pi}{m}}, k \in [\![1, m-1]\!]\right\}.}$$

Elles sont toutes simples.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, le polynôme $A_n = \sum_{k=0}^{2n-1} (1+X)^k$

4. On applique la question précédente avec $m = 2n$. On obtient que les racines de $\sum_{k=0}^{2n-1} X^k$ sont $e^{\frac{2ik\pi}{2n}}$, $k \in [\![1, 2n-1]\!]$. On en déduit que

   $$\boxed{\text{les racines de } A_n \text{ sont } \alpha_k = e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1,\ k \in [\![1, 2n-1]\!]}.$$

   Pour obtenir l'expression donnée, on utilise la factorisation par l'arc moitié. Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$. On a

   $$\alpha_k = e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1 = 2ie^{\frac{ik\pi}{2n}} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \underline{2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i\left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)}}.$$

   On a donc $\boxed{\theta_{k,n} = \frac{\pi(k+n)}{2n}}$.

   Les premières questions étaient là pour vous mettre sur la voie...

5. Le polynôme A_n est unitaire et nous avons trouvé ses racines qui sont simples. On en déduit la factorisation de A_n en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

   $$\boxed{A_n = \prod_{k=1}^{2n-1} (X - \alpha_k).}$$

   Le polynôme A_n étant scindé, on a, d'après les relations coefficients/racines :

   $$A_n(0) = (-1)^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} \alpha_k.$$

   Or $A_n(0) = \sum_{k=0}^{2n-1} 1 = 2n$. On a donc bien

   $$\boxed{\prod_{k=1}^{2n-1} \alpha_k = -2n}$$

6. On a

   $$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) &= \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \sin\frac{\pi}{2} \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{(2n-j)\pi}{2n}\right) \text{ en posant } j = 2n-k \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2 \text{ car l'indice est muet}\end{aligned}$$

   On a bien le résultat souhaité $\boxed{\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2}$.

7. On a

   $$\sum_{k=1}^{2n-1} \theta_{k,n} = \sum_{k=1}^{2n-1} \left(\frac{\pi(k+n)}{2n}\right) = \frac{\pi}{2n} \frac{2n(2n-1)}{2} + \frac{(2n-1)\pi}{2} = (2n-1)\pi,$$

   donc $\boxed{\sum_{k=1}^{2n-1} \theta_{k,n} = (2n-1)\pi}$.

8. On a vu que $\prod_{k=1}^{2n-1} \alpha_k = -2n$ et

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n-1} \alpha_k &= \prod_{k=1}^{2n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\theta_{n,k}} \\ &= 2^{2n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 e^{\sum_{k=1}^{2n-1}\theta_{n,k}} \\ &= 2^{2n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 e^{i(2n-1)\pi} \\ &= -2^{2n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2\end{aligned}.$$

On a donc $-2n = -2^{2n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2$ donc

$$P_n^2 = \frac{n}{2^{2n-2}}.$$

Enfin, chacun des angles apparaissant dans le produit est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc chaque sinus est positif. On en déduit que P_n est positif d'où $\boxed{P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}}$.

$\sqrt{x^2}$ n'est toujours pas égal à x.

Correction 3 1. La suite nulle appartient à E. Soit V, W deux suites de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda V + W \in E$.
On note $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $\lambda V + W = (\lambda v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\lambda v_{n+3} + w_{n+3} &= \lambda(3v_{n+2} - 4v_n) + (3w_{n+2} - 4w_n \text{ car } V, W \in E \\ &= 3(\lambda v_{n+2} + w_{n+2}) - 4(\lambda v_n + w_n)\end{aligned}$$

On a donc bien $\lambda V + W \in E$. E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

C'est effarant de constater qu'après presque 7 mois de cours, certains m'écrivent encore u_n au lieu de (u_n) ou bien manipule des expressions avec des n sans avoir défini n auparavant!

2. Soit H l'ensemble des suites constantes. Soit $(k)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite. On suppose qu'elle appartient à E. Alors $k = 3k - 4k$ donc $2k = 0$ ce qui implique $k = 0$. On en déduit que $E \cap H \subset \{(0)_{n\in\mathbb{N}}\}$ et l'autre inclusion est claire donc la somme est directe.

3.
Analyse :Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. On suppose qu'il existe trois suites (X, Y, Z) telles que

$$U = u_0 X + u_1 Y + u_2 Z$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 x_n + u_1 y_n + u_2 z_n$. En particulier,

$$\begin{cases} u_0 = u_0 x_0 + u_1 y_0 + u_2 z_0 \\ u_1 = u_0 x_1 + u_1 y_1 + u_2 z_1 \\ u_2 = u_0 x_2 + u_1 y_2 + u_2 z_2 \end{cases}$$

On remarque que $(x_0, x_1, x_2) = (1, 0, 0)$, $(y_0, y_1, y_2) = (0, 1, 0)$ et $(z_0, z_1, z_2) = (0, 0, 1)$ est bien solution du système.

Synthèse :Soit $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$. On pose $(x_0,x_1,x_2)=(1,0,0)$, $(y_0,y_1,y_2)=(0,1,0)$ et $(z_0,z_1,z_2)=(0,0,1)$ Par ailleurs, si on connaît les trois premiers termes de X,Y et Z, on connait tous leurs termes par la relation de récurrence qui caractérise E. On définit donc les trois suites ainsi. On a, en particulier : $(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,0,0,-4,-12)$, $(y_0,y_1,y_2)=(0,1,0,0,-4)$ et $(z_0,z_1,z_2)=(0,0,1,3,9)$. Montrons que l'on a bien $U=u_0X+u_1Y+u_2Z$. On note $U'=u_0X+u_1Y+u_2Z$ Les trois premiers termes de cette suite sont égaux aux trois premiers termes de U. De plus, E étant un ssev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a $U'\in E$. Or les trois premiers termes de la suite détermine de manière unique un élément de E, on a donc $U=U'$ ce qui montre bien l'existence de X,Y,Z telles que $U=u_0X+u_1Y+u_2Z$

4. On cherche à factoriser le polynôme $P(X)=X^3-3X^2+4$. On remarque tout d'abord qu'il admet -1 pour racine évidente. On peut donc le factoriser par $(X+1)$. En faisant la division euclidienne de P par $X+1$, on obtient
$$P=(X+1)(X-2)^2$$
5. Soit $x\in\mathbb{C}^\star$. On suppose que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x^{n+3}=3x^{n+2}-4x^n$ donc, en divisant par $x\neq 0$, on obtient $P(x)=0$. On en déduit que $x=-1$ ou $x=2$. On a montré (phase d'analyse), que si une suite géométrique non nulle de la forme $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E, sa raison ne peut valoir que -1 ou 2. Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a bien
$$3.2^{n+2}-4.2^n=(12-4).2^n=2^{n+3} \text{ et } 3(-1)^{n+2}-4(-1)^n=-(-1)^n=(-1)^{n+3},$$
donc ces deux suites sont bien des éléments de E.
On a montré que E ne contient que deux suites géométriques $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x\in\mathbb{C}^\star$.
On peut aussi raisonner par équivalence pour s'éviter la vérification. Soit $x=(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a
$$\begin{aligned} x\in E &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, x^{n+3}=3x^{n+2}-4x^n\\ &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, x^n\left(x^3-3x^2+4\right)=0\\ &\Leftrightarrow x^3-3x^2+4=0 \text{ car } \forall n\in\mathbb{N}, x^n\neq 0\\ &\Leftrightarrow x\in\{-1,2\}\end{aligned}$$
6. Soit $A=(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $B=\left(n2^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $C=((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrons que $\mathscr{L}=(A,B,C)$ est une famille libre .
Soit donc $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha A+\beta B+\gamma C=0$ (suite nulle). On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\alpha 2^n+\beta n2^{n-1}+\gamma(-1)^n=0.$$
On explicite les trois premiers termes :
$$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ 2\alpha+\beta-\gamma=0\\ 4\alpha+4\beta+\gamma=0\end{cases}$$
On fait $L_3\leftarrow -L_3+4L_2$:
$$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ 2\alpha+\beta-\gamma=0\\ 4\alpha-5\gamma=0\end{cases}$$
donc $\alpha=\gamma=0$ puis $\beta=0$ et la famille est libre.

7. Montrons que $X\in\operatorname{Vect}(A,B,C)$.
On cherche donc $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha A+\beta B+\gamma C=X$ On explicite les trois premiers termes :
$$\begin{cases}\alpha+\gamma=1\\ 2\alpha+\beta-\gamma=0\\ 4\alpha+4\beta+\gamma=0\end{cases}$$

On fait $L_3 \leftarrow -L_3 + 4L_2$:

$$\begin{cases} \alpha+\gamma=1 \\ 2\alpha+\beta-\gamma=0 \\ 4\alpha-5\gamma=0 \end{cases}$$

On trouve $(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{5}{9}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$.
Par égalité des trois premiers et le fait que l'on travaille avec des éléments de E, on peut affirmer que $X = \frac{5}{9}X - \frac{2}{3}Y + \frac{4}{9}Z$ donc on a bien $X \in \mathrm{Vect}(A,B,C)$.
On admet que l'on montre de la même manière que Y et Z appartiennent à $\mathrm{Vect}(A,B,C)$.

8. Montrons que $\mathscr{L}$ est une base de E. On sait que X, Y et Z sont des éléments de $\mathrm{Vect}(A,B,C)$ donc, $\mathrm{Vect}(A,B,C)$ étant un ssev, on a l'inclusion $\mathrm{Vect}(X,Y,Z) \subset \mathrm{Vect}(A,B,C)$.
Montrons que $\mathrm{Vect}(A,B,C) \subset E$. Comme E est un ssev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il suffit de montrer que A, B et C appartiennent à E. On sait déjà que A et C sont des éléments de E. Montrons que c'est le cas de B : Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$3(n+2)2^{n+1} - 4n2^{n-1} = 2^{n-1}(12(n+2)-4n) = 2^{n-1}(8n+24) = 2^{n+2}(n+3),$$
On a donc bien $B \in E$. Ainsi, on a montré l'inclusion $\mathrm{Vect}(A,B,C) \subset E$. On a donc, par double inclusion, $E = \mathrm{Vect}(A,B,C)$. On sait donc que $\mathscr{L}$ est une famille génératrice de E. Comme on a montré que c'est une famille libre, on en déduit que c'est une base de E.

Elle a été oublié dans l'immense majorité des cas cette inclusion réciproque.

9. Soit $U = (u_n) \in E$ telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 0$. Donner une expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il suffit de déterminer $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \alpha A + \beta B + \gamma C$. On résout :
$$\begin{cases} \alpha+\gamma=5 \\ 2\alpha+\beta-\gamma=0 \\ 4\alpha+4\beta+\gamma=7 \end{cases}$$
On fait $L_3 \leftarrow -L_3 + 4L_2$:
$$\begin{cases} \alpha+\gamma=5 \\ 2\alpha+\beta-\gamma=0 \\ 4\alpha-5\gamma=-7 \end{cases}$$
On trouve $(\alpha,\beta,\gamma) = (3,2,-1)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 2.2^n - n2^{n-1} + 3(-1)^n.}$

10. On pose $F = \mathrm{Vect}(A,B)$.
   (a) On sait que (A,B,C) est une base de E, on en déduit que $\mathrm{Vect}(C)$ est un supplémentaire de F dans E.
   (b) Par opération élémentaire, on sait que $(A,B,A+C)$ est également une base de E, on en déduit que $\mathrm{Vect}(A+C)$ est également un supplémentaire de F dans E. Il est distinct de $\mathrm{Vect}(A)$ car $A+C$ et A ne sont pas colinéaires. (on peut s'en convaincre en écrivant $((A+C,A)$ libre $\Leftrightarrow$ $((A,C)$ libre) et la deuxième assertion est vraie car (A,C) est une sous-famille de $\mathscr{L}$ qui est libre, donc $(A+C,C)$ est libre, par équivalence.

Correction 4 1. On a $P_n'(x) nx^{n-1} + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Est-ce (encore) utile de vous dire que donner $P_n'(x)$ sans préciser ce qu'est x est une faute inacceptable ?

2. Comme n est impair, $n-1$ est pair donc $x^{n-1} \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ d'où $P'_n(x) > 0$. P_n étant strictement croissante, elle est injective. Par ailleurs, comme $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = -\infty$, l'image de P_n est $\mathbb{R}$ donc P_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On sait donc que 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ que l'on note β_n. Comme $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = 1$, on sait de plus que β_n est compris entre 0 et 1.

   On peut aussi ne pas calculer l'image mais appliquer le TVI entre 0 et 1 à P_n continue ce qui donne l'existence puis invoquer l'injectivité pour obtenir l'unicité. *Oh, une question où on demande de montrer qu'une fonction a un unique antécédent! mais on n'a jamais vu comment rédiger une telle question!?!? rien d'étonnant donc que certains me parle encore du corollaire du TVI.*

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $P'_n(x) = nx^{n-1} + 1$ donc $P'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = -\frac{1}{n}$ et cette équation possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ car $n-1$ est impair. On la note α_n.

   (b) De par l'expression de P'_n, on a $P'_n(\alpha_n) = 0 = n\alpha_n^{n-1} + 1 \Leftrightarrow \alpha_n^{n-1} = -\frac{1}{n}$. Pour tout $n \geqslant 2$, $-\frac{1}{n} < 0$ donc $\alpha_n^{n-1} < 0$ et comme $n-1$ est impair, α_n et du même signe que α_n^{n-1}.

   (c) On a $P_n(\alpha_n) = \alpha_n^n + \alpha_n - 1 = \alpha_n.\alpha_n^{n-1} + \alpha_n - 1 = -\frac{\alpha_n}{n} + \alpha_n - 1 = \frac{n-1}{n}\alpha_n - 1$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\frac{n-1}{n} \geqslant 0$ donc $\frac{n-1}{n}\alpha_n < 0$ et par suite $P_n(\alpha_n) < 0$.

   (d) On a le tableau suivant

x	$-\infty$		α_n		$+\infty$
P'_n		-	0	+	
P_n	$+\infty$	$\searrow$	$P_n(\alpha_n)$	$\nearrow$	$+\infty$

   La fonction P_n étant strictement croissante sur $[\alpha_n, +\infty[$, elle réalise une bijection de $[\alpha_n, +\infty[$ sur $[P_n(\alpha_n), +\infty[$ et comme $P_n(\alpha_n) < 0$, 0 appartient à l'image donc possède un unique antécédent que l'on note β_n. On vérifie ensuite que $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = 1$ ce qui assure que β_n est compris entre 0 et 1.

4. (a) On a $P_{n+1}(\beta_n) = \beta_n^{n+1} + \beta_n - 1$ or $\beta_n^n = 1 - \beta_n$ par hypothèse, donc, par définition de β_{n+1}, $P_{n+1}(\beta_n) = \beta_n(1-\beta_n) + \beta_n - 1 = -(1-\beta_n)^2$.

   (b) D'après l'expression trouvée à la question précédente, on a $P_{n+1}(\beta_n) < 0$ et on sait que $P_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$. Or P_{n+1} est croissante sur $]0,1[$ donc $\beta_n < \beta_{n+1}$, ce qui montre que la suite (β_n) est croissante.

   Mais pourquoi me dites-vous "par croissance de P_n" alors que vous avez une inégalité avec P_{n+1} ?

   (c) La suite $(\beta_n)_n$ est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente. Par ailleurs, comme $\beta_n \in]0,1[$ et $(\beta_n)_n$ croissante, la limite l ne peut être nulle donc on a $l \in]0,1]$.

5. (a) Comme (β_n) converge vers l, on a $1-\beta_n \to 1-l = L$ or par construction de (β_n), on a $\beta_n^n = 1-\beta_n$ donc $\beta_n^n \to L$.

   (b) On suppose par l'absurde que $L \neq 0$, alors, on a $\ln(\beta_n^n) \to \ln L$ par continuité de ln. Or (β_n) converge donc $\ln(\beta_n)$ admet une limite et si celle-ci est non-nulle, on a alors $n\ln(\beta_n) \to +\infty$. Il faut donc nécessairement $\lim_{+\infty} \ln \beta_n = 0$.

   (c) Comme $\beta_n \to l$, par continuité de ln, $\ln(\beta_n) \to \ln l$ et par unicité de la limite, on a $\ln l = 0$ donc $l = 1$ ce qui contredit l'hypothèse $L \neq 0$. On a donc montré par l'absurde que $L = 0$ c'est-à-dire que la suite (β_n) converge vers 1.

   Certains m'ont dit que la limite était 1 d'après la question précédente... où on avait supposé que ce n'était pas le cas!!!