Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
DM 10

Devoir maison 10.

à rendre, pour ceux et celles qui le souhaitent, le lundi 20 avril.

I: Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

1. Montrer que $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $W_{n+2} = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) W_n$.
4. En déduire que pour tout entier $p \geqslant 0$, on a
$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.\dfrac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$
5. Montrer que, pour $n \geqslant 0$, on a $W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.
6. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $1 - \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{W_{n+1}}{W_n} < 1$ et en déduire que $W_n \sim W_{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$.
7. Montrer finalement que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

II: Formule de Stirling

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définie pour $n \geqslant 2$ par $v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$.

1. Exprimer simplement v_n en fonction de n.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de v_n.
3. Montrer que la suite de terme général $V_n = \sum_{k=2}^{n} v_k$ est décroissante à partir d'un certain rang.
4. En déduire qu'elle est convergente.
5. Montrer alors que les suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que
$$n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$
6. En utilisant cet équivalent, donner un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ (formule de Stirling)}$$