Correction du DM n10

I: Intégrales de Wallis
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

1. Montrer que $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$
   On fait un changement de variable en posant $y = \frac{\pi}{2} - x$. On a $dx = -dy$ donc
   $$W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - y\right)(-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(y)dy.$$

2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]0;1[$, $\cos x \in]0,1[$ donc $\cos^n x \geqslant \cos^{n+1} x, \forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$. On intègre ensuite l'inégalité entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et on obtient, par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant W_{n+1}$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \cos^n(x)(1-\cos(x))$ est continue et ce n'est pas la fonction nulle sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc, par stricte positivité de l'intégrale, on a
   $$W_n > W_{n+1},$$
   La suite est donc strictement décroissante.

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $W_{n+2} = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) W_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme suggéré, on fait une intégration par parties en écrivant $\cos^{n+2} x = \cos^{n+1} x \cos x$. On a alors
   $$W_{n+2} = \underbrace{[\cos^{n+1} x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(-(n+1)\sin x \cos^n x)dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^n x dx$$
   d'où
   $$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}) \text{ ou encore } W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

4. En déduire que pour tout entier $p \geqslant 0$, on a
   $$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} . \dfrac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$
   On différencie le cas où n est pair et impair.

   - Si $n = 2p$, on a
     $$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} . \frac{2p-3}{2p-2} W_{2p-4} = \frac{2p-1}{2p} . \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{1}{2} W_0$$
     c'est-à-dire
     $$W_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} 2k+1}{\prod_{k=1}^{p} 2k} W_0 = \frac{\left(\prod_{k=0}^{p-1} 2k+1\right) . \left(\prod_{k=1}^{p} 2k\right)}{\left(\prod_{k=1}^{p} 2k\right)^2} W_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} W_0$$
     puisque $\prod_{k=1}^{p} 2k = 2^p \prod_{k=1}^{p} k$. On conclut en remarquant que $W_0 = \frac{\pi}{2}$.

- Supposons maintenant $n = 2p + 1$, on a

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \cdots \frac{2}{3} W_1$$

On conclut en procédant comme pour le cas pair, en remarquant que $W_1 = 1$.

On peut aussi procéder par récurrence sur p.
On pose $HR_p : W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$

On sait que $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.
On suppose la propriété vraie au rang p.
On a alors

- $W_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2} W_{2p} = \dfrac{2p+1}{2p+2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p+1)(2p+2)}{4(p+1)^2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p+2)!}{2^{2p+2}\left((p+1)!\right)^2}$ et
- $W_{2p+3} = \dfrac{2p+2}{2p+3}\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{4(p+1)^2}{(2p+3)(2p+2)}\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{2^{2p+2}\left((p+1)!\right)^2}{(2p+3)!}$

La propriété est vraie au rang $p+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier.

5. Montrer que, pour $n \geqslant 0$, on a $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$, alors $u_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_{n+1}\dfrac{n+1}{n+2}W_n = (n+1)W_n W_{n+1} = u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et $u_0 = W_0 W_1 = \dfrac{\pi}{2}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ d'où le résultat souhaité. On peut aussi procéder par disjonction de cas.

- Si $n = 2p$, $W_{2p}W_{2p+1} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.\dfrac{\pi}{2}\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{(2p)!2^{2p}(p!)^2\pi}{2.2^{2p}(p!)^2(2p+1)!} = \dfrac{\pi}{2(2p+1)}$.
- Si $n = 2p+1$, $W_{2p+1}W_{2p+2} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\dfrac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1!)^2}.\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p+2)\pi}{8(p+1)^2} = \dfrac{\pi}{4(p+1)}$ et comme $4(p+1) = 2(2p+1+1)$, on retrouve la formule demandée.

6. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $1 - \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{W_{n+1}}{W_n} < 1$ et en déduire que $W_n \sim W_{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$.
La première inégalité vient du fait que la suite (W_n) est strictement décroissante et strictement positive. Pour l'autre inégalité, on écrit

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}}.\frac{W_{n+2}}{W_n} > \frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

On montre que $\left(\dfrac{W_{n+1}}{W_n}\right)$ tend vers 1 par le théorème des gendarmes, ce qui montre que $W_n \sim W_{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

7. Montrer finalement que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$
On utilise les deux questions précédentes: $W_n \sim W_{n+1}$ donc $W_n W_{n+1} \sim W_{n+1}^2$ et comme $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$, on a $W_{n+1} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}}$ d'où $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

II: Formule de Stirling

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définie pour $n \geqslant 2$ par $v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$.

1. Exprimer simplement v_n en fonction de n.
   On a

$$v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} e\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = (n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + 1 + \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

   ou encore $v_n = (n-\frac{1}{2})\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+1$.

2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de v_n.
   Pour avoir un développement limité à l'ordre 2 de $(n-\frac{1}{2})\ln(1-\frac{1}{n})$, il faut faire un développement limité de $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ à l'ordre 3. On a

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

   donc

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+1 = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1$$
$$= -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3. Montrer que $V_n = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k$ est convergente. Montrer alors que les suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$$

   On sait que v_k est équivalent à $-\dfrac{1}{12k^2}$ donc à partir d'un certain rang, la suite (v_k) est négative. Cela implique que la suite (V_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

4. Il suffit donc de montrer qu'elle est minorée pour avoir avoir la convergence. On va montrer qu'elle est bornée ce qui donnera le résultat.
   Comme $v_k \sim -\dfrac{1}{12k^2}$, il existe N tel que $\forall k \geqslant N$, $|12k^2.v_k - 1| \leqslant 1$ (on prend $\epsilon = 1$) donc on a $|v_k| \leqslant 2\dfrac{1}{12k^2} = \dfrac{1}{6k^2}$. Ainsi, pour $n > N$, on a

$$|V_n| \leqslant \sum_{k=2}^{n}|v_k| = \sum_{k=2}^{N-1}|v_k| + \sum_{k=N}^{n}|v_k| \leqslant \sum_{k=2}^{N-1}|v_k| + \sum_{k=N}^{n}\frac{1}{6k^2}$$

   On sait que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc elle est bornée et par suite, il existe $M > 0$ tel que $\sum\limits_{k=N}^{n}\dfrac{1}{6k^2} \leqslant M$. Il suffit maintenant de prendre $K = \max\left\{\sum\limits_{k=2}^{N-1}|v_k|, M\right\}$ (on peut car N est fixé!) et on obtient que pour tout $n \geqslant N$, $|V_n| \leqslant K$ ce qui achève de montrer que la suite est convergente.

5. Comme V_n est une somme téléscopique, on a $V_n = \ln(u_n) - \ln(u_1)$. La suite $(V_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente, cela implique que $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(u_n) \to k$ ce qui implique $u_n \to e^k$. On pose $K := e^k > 0$, on a le résultat souhaité.

   On obtient l'équivalent demandé en écrivant que $\dfrac{u_n}{K} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$ et en revenant à l'expression de u_n.

6. En utilisant cet équivalent, donner un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ (formule de Stirling)}$$

   On sait que $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.\dfrac{\pi}{2}$ donc

$$W_{2p} \sim \frac{K(2p/e)^{2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}\left(K(p/e)^p\sqrt{p}\right)^2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2p}}{K2p} = \frac{\pi}{K\sqrt{2p}}$$

   or on a montré à la question 7 de la partie précédente que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$. Cela implique $\sqrt{\frac{\pi}{4p}} \sim \frac{\pi}{K\sqrt{2p}}$ donc le quotient tend vers 1, or $\dfrac{\sqrt{\pi/4p}}{\pi/K\sqrt{2p}} = \dfrac{K}{\sqrt{2\pi}}$ donc cela impose $K = \sqrt{2\pi}$. En injectant la valeur de K dans l'équivalent de $n!$ trouvé à la question précédente, on obtient la formule de Stirling.