Exercice 5.
Montrer que la série de terme général $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, pour $n \geqslant 2$, est convergente et calculer sa somme.

Exercice 6.
Montrer que la série de terme général $\dfrac{k}{(k+1)!}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 7.
On admet que la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$. Déterminer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$.

Exercice 8.
Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 9.
Soit $x \in \mathbb{R}$. L'objectif de l'exercice est de mettre en évidence une technique pour calculer les sommes du type $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\dfrac{x^n}{n!}}$, où P est un polynôme.

1. Déterminer (après avoir montré son existence) la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} n\dfrac{x^n}{n!}$.
2. Même question avec $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dfrac{x^n}{n!}$.
3. En déduire la réponse à la question initiale dans le cas où P est de degré $\leqslant 2$.
4. Que faire lorsque P est de degré quelconque ?

3 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 10.
Étudier la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants ; on précisera si besoin le type de convergence.

1. $u_n = \dfrac{1}{n+\ln(n)}$
2. $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)$
3. $u_n = \ln(\cos(1/2n))$
4. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
5. $u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^\alpha$.
6. $u_n = n\ln n\, e^{-\sqrt{n}}$
7. $u_n = \left(\dfrac{1}{\ln 3n}\right)^n$
8. $\dfrac{\ln((n+1)(n+2))}{n(n+3)}$
9. $u_n = \dfrac{e^{-2n}+n}{n^3+1}$

Lycée du Parc
PCSI 842
Feuille 19

Année 2025-2026

TD 19 : Séries numériques.

---

1 Nature de séries

Exercice 1.
Étudier la nature des séries de terme général donné dans les cas suivants ; on précisera si besoin le type de convergence.

1. $\dfrac{1}{n^2+n}$
2. $\dfrac{e^n}{n^5+e^{-n}}$
3. $\cos\left(\pi+\dfrac{n}{n+1}\right)$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{\pi}{2n}$
5. $\sqrt[n]{n}$
6. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$

Exercice 2.
Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudier la convergence des séries de termes généraux :

1. u_n^2
2. $\dfrac{u_n}{1+u_n}$
3. $\dfrac{u_n}{1-u_n}$
4. $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$

Exercice 3.
On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_1\in\mathbb{R}$ et $\forall n\geqslant 1, u_{n+1}=\dfrac{1}{n}e^{-u_n}$. On souhaite étudier les séries $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
2. En déduire que $u_n\sim\dfrac{1}{n}$.
3. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$?
4. On pose $v_n=-u_n+\dfrac{1}{n-1}$. Montrer que $v_n\sim\dfrac{1}{n^2}$.
5. Montrer : $u_{2n}-u_{2n-1}=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
6. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$?

2 Détermination de la somme

Exercice 4.
Déterminer la somme de la série de terme général $2^{n+1}3^{2-n}$, $n\geqslant 0$.

10. $u_n=\dfrac{\cos(n^2)+n\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$

Exercice 11.
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Déterminer la nature de $\sum\dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$.

Exercice 12.
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On suppose que $\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$ converge, qu'en est-il de $\sum u_n$?

Exercice 13.
Montrer que la série de terme général $\dfrac{3^{n-1}}{5^{n+1}}$, $n\geqslant 0$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 14.
Vérifier que la série est convergente $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n+1}{3^n}$ et calculer sa somme.

Exercice 15.
Vérifier que la série est convergente $\sum\limits_{k\geqslant 2}\dfrac{1}{\sqrt{k-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}-\dfrac{2}{\sqrt{k}}$ et calculer sa somme.

4 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 16.
Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Que dire des séries de termes généraux $\sqrt{u_n}$ et $(-1)^n\sqrt{u_n}$?

Exercice 17.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite positive. On pose $v_n=\dfrac{1}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}ku_k$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et, lorsqu'elles convergent, même somme.

Exercice 18. **(CCINP 1999)**
Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Exercice 19. **(Mines-Pont MP 2005)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et $v_n=\dfrac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge implique $\sum v_n$ diverge.
Que dire si $\sum u_n$ diverge ?

Exercice 20. **(Mines MP 2000)**
Soit $\alpha>0$, étudier la série de terme général $\sum\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$.

Exercice 21.

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k u_k$

Memo

- Comment déterminer la nature d'une série ?
  - Identifier une divergence grossière
  - Majorer le terme général positif (ou sa valeur absolue) par le t.g d'une série convergente.
  - Montrer que la somme partielle (avec t.g positif) est bornée.
  - Multiplier le terme général par n^α, $\alpha > 1$ et montrer que le tout tend vers zéro.
  - Multiplier le terme général par n^α, $\alpha \leqslant 1$ et montrer que le tout tend vers $+\infty$.
  - Déterminer un équivalent du terme général et conclure s'il est de signe constant.
  - Faire apparaître une somme télescopique
  - Déterminer un développement limité du terme général en espérant tomber sur un cas où l'on peut conclure (CV+CV ou DIV+CV)
- Comment déterminer la somme d'une série convergente ?
  - Reconnaître ou exprimer à l'aide d'une somme télescopique
  - Reconnaître ou exprimer à l'aide d'une somme géométrique
  - Reconnaître ou exprimer à l'aide d'une série exponentielle

Correction du TD n 19

Correction 1

1. $u_n = \frac{1}{n^2+n}$

   On a $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum u_n$ converge.
2. $u_n = \frac{e^n}{n^5+e^{-n}}$
   On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par le théorème de croissances comparées donc la série diverge grossièrement.

   On a $n\sqrt{n}u_n = \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}u_n = 0$ car cos est bornée. On en déduit, par comparaison à une série de Riemann, que $\sum u_n$ converge.
3. $u_n = (-1)^n \cos \dfrac{n}{n+1}$
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{\pi}{2n}$
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2n} = 0$ donc $\sin \dfrac{\pi}{2n} \sim \dfrac{\pi}{2n}$. On en déduit que $u_n \sim \dfrac{\pi}{2n\sqrt{n}}$. Par comparaison à une série de Riemann, la série converge.

   On écrit $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Ainsi, on a écrit u_n comme la somme de deux termes généraux de séries convergentes. On en déduit que $\sum u_n$ converge.
5. On a $\sqrt[n]{n} = \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln(n)\right) \to 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ par le théorème de croissances comparées. La série diverge donc grossièrement.
6. On va chercher un équivalent du terme général. On écrit :

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} &= exp\left(\frac{1}{n}\ln(n+1)\right) - exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) \\
&= exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right) - exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) \\
&= exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)\left(exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \\
&= exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)\left(exp\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right) \\
&= exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

   Par le théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} exp\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) = 1$ donc $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \dfrac{1}{n^2}$.

   Le terme général de la série est positif, par croissance de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. On peut donc affirmer que la série $\sum\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$ converge.

Correction 2

1. A partir d'un certain rang, $u_n \leqslant 1$ car $u_n \to 0$, on a donc $u_n^2 \leqslant u_n$. Par le thm de majoration des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n^2$ converge.
2. On peut dire que $u_n \geqslant 0$ donc $\dfrac{u_n}{1+u_n} \leqslant u_n$ et par le thm de majoration des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge. On peut aussi dire que $u_n \to 0$ donc $\dfrac{1}{1+u_n} \sim u_n$ et par le thm de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.
3. On sait que $u_n \to 0$ donc il existe un rang à partir duquel $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a alors $1 - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{u_n}{1-u_n} \leqslant 2u_n$. Par le thm de majoration des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \dfrac{1}{1-u_n}$ converge. On peut aussi dire que $u_n \to 0$ donc $\dfrac{1}{1-u_n} \sim u_n$ et par le thm de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{u_n}{1-u_n}$ converge.
4. On sait que pour tout a, b, $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$, on a donc $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{2n^2}$. Les deux séries $\sum \dfrac{u_n}{2}$ et $\sum \dfrac{1}{2n^2}$ convergent donc par le thm de majoration des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Correction 3

1. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant 0$ donc $e^{-u_n} \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2, 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. On a $u_{n+1} = \dfrac{1}{n}e^{-u_n} \sim \dfrac{1}{n}$ donc pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \sim \dfrac{1}{n-1}$ puis $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Par le thm de comparaison des séries à termes positifs, on a $\sum u_n$ divergente.

4. On pose $v_n = -u_n + \dfrac{1}{n-1}$. On écrit

$$\begin{aligned} v_n &= -\frac{1}{n-1}e^{-u_{n-1}} + \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1}\left(1-e^{-u_{n-1}}\right) \\ &\sim \frac{u_{n-1}}{n-1} \\ &\sim \frac{1}{(n-1)^2} \\ &\sim \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

On a bien l'équivalent souhaité.

5. D'après la question précédente, on a $\dfrac{1}{n-1} - u_n = \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a donc

$$u_{2n} - u_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{(2n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc

$$u_{2n} - u_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n-2)} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(2n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(u_{2n} - u_{2n-1})$ existe et est finie. Ainsi, $u_{2n} - u_{2n-1} = 0\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

6. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k u_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k u_k \\ &= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k u_k + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k u_k \\ &= \sum_{j=1}^{N} u_{2j} - \sum_{j=1}^{N} u_{2j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left(u_{2j} - u_{2j-1}\right) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, et par le thm de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $u_{2j} - u_{2j-1}$ est convergente donc $(S_{2N})_{N\geqslant 1}$ converge vers une limite S. On sait que $S_{2N+1} = S_{2N} + u_{2N+1}$ donc la suite $(S_{2N+1})_{N\geqslant 0}$ est également convergente, de même limite que $(S_{2N})_{N\geqslant 1}$. On en déduit que la suite des sommes partielles de $\sum(-1)^n u_n$ converge donc la série est convergente.

Correction 4 On écrit :

$$2^{n+1}3^{2-n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}} = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

On reconnaît, à un facteur près, une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ avec $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$. La série converge et sa somme est :

$$18 \times \frac{1}{1-2/3} = 54.$$

Correction 5 Son terme général est de signe constant négatif et il est équivalent à $-\dfrac{1}{n^2}$, elle est donc convergente par comparaison à une série de Riemann.

On écrit :

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

On reconnaît une somme télescopique. Comme on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0,$$

la somme de la série est égale à son premier terme, c'est-à-dire $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

Correction 6 On multiplie le terme général par k^2 afin de savoir si c'est un $o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. On a :

$$\frac{k^3}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-2)!}\,\frac{k}{k-1}\,\frac{k}{k+1}$$

ce qui tend vers 0. On a donc :

$$\frac{k}{(k+1)!} = o\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

donc la série converge. Pour faire apparaître une somme télescopique, on écrit :

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{k!} = 0$, la somme de la série est alors égale à $\dfrac{1}{0!} = 1$.

Correction 7 Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $1 = (k+1-k)^2 = (k+1)^2 - 2k(k+1) + k^2$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2}\\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2\dfrac{\pi^2}{6} - 3 = \dfrac{\pi^2}{3} - 3$.

Correction 8 On commence par remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1 < \left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 1$$

et $sqrt n+1 - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \in]0,1]$ donc

$$\left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \in]-1, 2[\text{ d'où } \left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \in \{0, 1\}.$$

On aura $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 1$ s'il existe un entier m tel que $\sqrt{n} < m \leqslant \sqrt{n+1}$. En élevant au carré, on obtient $0 < m^2 - n \leqslant 1$ donc $m^2 = n+1$.

Autrement dit, le terme général de la série est nul sauf lorsque $n+1$ est un carré.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left\lfloor \sqrt{k+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor}{k} = \sum_{1 \leqslant j^2-1 \leqslant n} \frac{1}{j^2-1} = \sum_{j=2}^{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor} \frac{1}{j^2-1}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j^2-1} = \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{(j-1)(j+1)} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{N} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j+1}\right)$$

puis, après un changement d'indice dans les deux sommes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{j=2}^{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor} \frac{1}{j^2-1} = \frac{3}{4}$.

Correction 9

1. Pour $n \neq 0$, $\dfrac{nx^n}{n!} = \dfrac{x^n}{(n-1)!}$. Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{nx^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^{n+1}}{n!}\\ &= x\sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

   La série est donc convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, par convergence de la série exponentielle et sa somme vaut xe^x.

2. On procède de même, pour $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{n(n-1)x^n}{n!} = \dfrac{x^n}{(n-2)!}$ donc pour tout $N \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)x^n}{n!} &= \sum_{n=2}^{N} \frac{x^n}{(n-2)!}\\ &= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^{n+2}}{n!}\\ &= x^2\sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

   La série est donc convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, par convergence de la série exponentielle et sa somme vaut x^2e^x.

3. Soit $P = aX^2 + bX + c$, alors $P = aX(X-1) + (b+a)X + c$ donc la série de terme général $P(n)\dfrac{x^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $(ax^2 + (b+a)x + c)e^x$.

4. Dans le cas général d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il faut déterminer ses coordonnées dans la base $(1, X, X(X-1), \ldots, X(X-1)\ldots(X-n+1))$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Si on les note $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$, on a alors que la série de terme général $P(n)\dfrac{x^n}{n!}$ est convergente et a pour somme $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k\right)e^x$.

Correction 10

1. $u_n = \frac{1}{n+\ln(n)}$

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par le théorème de croissances comparées donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, la série diverge.

2. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right)$

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$ donc $u_n \sim -\dfrac{1}{n+2} \sim \dfrac{1}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, la série diverge.

3. $u_n = \ln(\cos(1/2n))$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\dfrac{1}{2n} = 1$ donc $u_n \sim \cos\dfrac{1}{2n} - 1 \sim \dfrac{1}{2n^2}$. Par comparaison à une série de Riemann, la série converge.

4. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
On a $\sqrt[n]{n} = exp\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$. Par le théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. On en déduit que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, la série diverge.

5. $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$.
On écrit

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^\alpha \end{aligned}$$

On a $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{2^\alpha\sqrt{n}^\alpha}$. On sait que $\sqrt{n}^\alpha = n^{\alpha/2}$ donc, par comparaison à une série de Riemann :
— Si $\alpha > 2$, la série converge.
— Si $\alpha \leqslant 2$, la série diverge.

6. $u_n = n\ln n\, e^{-\sqrt{n}}$
Par le théorème de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$. Par comparaison à une série de Riemann, la série converge.

7. $u_n = \left(\dfrac{1}{\ln 3n}\right)^n$
On écrit $u_n = exp\left(n\ln\dfrac{1}{\ln(3n)}\right) = exp\left(-n\ln\ln(3n)\right)$. On va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$. On écrit :

$$\begin{aligned} n^2 u_n &= n^2 exp\left(-n\ln\ln(3n)\right) \\ &= \underbrace{\frac{n^2}{(-n\ln\ln(3n))^2}}_{\to 0} \cdot \underbrace{(-n\ln\ln(3n))^2\, exp\left(-n\ln\ln(3n)\right)}_{\to 0} \end{aligned}$$

la deuxième limite étant 0 grâce au théorème de croissances comparées. On en déduit que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série converge.

8. On cherche un équivalent du terme général. On écrit :

$$\begin{aligned} \ln\left((n+1)(n+2)\right) &= \ln(n^2) + \ln\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \\ &= \ln(n^2)\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\ln(n^2)}\right) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\ln(n^2)} = 0$ donc $\ln\left((n+1)(n+2)\right) \sim \ln(n^2)$.
On en déduit que :

$$\frac{\ln\left((n+1)(n+2)\right)}{n(n+3)} \sim \frac{\ln(n^2)}{n^2}.$$

En multipliant cet équivalent par $n\sqrt{n}$, on trouve une limite nulle par croissances comparées. On en déduit que :

$$\frac{\ln\left((n+1)(n+2)\right)}{n(n+3)} = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum \dfrac{\ln\left((n+1)(n+2)\right)}{n(n+3)}$ est donc convergente.

9. $u_n = \dfrac{e^{-2n}+n}{n^3+1}$
On a $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$. On en déduit, par comparaison à une série de Riemann, que la série de terme général $\dfrac{e^{-2n}}{n^3}$ converge. Par le théorème de comparaison entre séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

10. $u_n = \dfrac{\cos(n^2) + n\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$
On a $|u_n| \leqslant \dfrac{1+n}{n^2\sqrt{n}}$ et $\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. Par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général $\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}$ est convergente. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |u_n|$ converge. La série de terme général u_n est donc absolument convergente donc convergente.

Correction 11 On écrit $\dfrac{u_n}{1+n^2u_n} \leqslant \dfrac{u_n}{n^2u_n}$ ainsi, la série à termes positifs $\sum \dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$ a son terme général majoré par $\dfrac{1}{n^2}$ donc, par comparaison à une série de Riemann, elle converge.

Correction 12 Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{u_n u_n}\leqslant\sqrt{u_n}\sqrt{u_{n-1}}$$

donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{u_n u_{n-1}}\geqslant u_n.$$

Le terme général est positif et majoré par le terme général d'une série convergente donc la série $\sum u_n$ converge.

Correction 13 On écrit :

$$\frac{3^{n-1}}{5^{n+1}}=\frac{1}{15}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

La série est donc convergente car c'est un multiple d'une série géométrique de raison $\frac{3}{5}$. Sa somme vaut :

$$\frac{1}{15}\times\frac{1}{1-3/5}=\frac{1}{6}.$$

Correction 14 On peut réécrire cette série $\sum_{k\geqslant 1} k.\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$. On reconnaît alors la série dérivée. On peut donc affirmer qu'elle converge d'après le cours puisque $\left|\frac{1}{3}\right|<1$. De plus, on sait que sa somme est

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{9}{4}.$$

Correction 15 On pose $a_n=\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}$. La série est alors de la forme $\sum a_k-a_{k+1}$. Elle converge donc si et seulement si la suite (a_k) converge ce qui est le cas (vers 0) et on a :

$$\sum_{k\geqslant 2}(a_k-a_{k+1})=a_2-\lim_{n\to+\infty}a_n=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Correction 16 Pas grand chose, $\sum\frac{1}{n^2}$ converge et $\sum\frac{1}{n}$ diverge mais $\sum\frac{1}{n^4}$ converge et $\sum\frac{1}{n^2}$ aussi.

De même, $\sum\frac{1}{n^2}$ converge et $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ converge. En revanche, $\sum\frac{(1+(-1)^n)^2}{n^2}$ converge mais $\sum(-1)^n\frac{1+(-1)^n}{n}$ diverge car c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Correction 17 Soit $n\in\mathbb{N}^\star$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n v_k &= \sum_{k=1}^n\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^k iu_i\\ &=\sum_{i=1}^n\sum_{k=i}^n\frac{iu_i}{k(k+1)}\\ &=\sum_{i=1}^n iu_i\sum_{k=i}^n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &=\sum_{i=1}^n iu_i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &=\sum_{i=1}^n u_i-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n iu_i\\ &=\sum_{i=1}^n u_i-nv_n\end{aligned}$$

Supposons tout d'abord que $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n\geqslant 1$, $\sum_{k=1}^n v_k\leqslant\sum_{k=1}^n u_k$ donc la suite des sommes partielles de $\sum v_k$ est majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle converge.

Par ailleurs, on a l'égalité $\sum_{k=1}^n v_k+nv_n=\sum_{k=1}^n u_k$. Comme les deux séries convergent, $(nv_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ admet une limite finie. Si elle vaut $l\neq 0$, on a $v_n\sim\frac{l}{n}$ ce qui est absurde puisque $\sum v_n$ converge. Ainsi $l=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n v_k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n u_k$ et les deux séries ont la même somme.

On suppose maintenant que $\sum u_n$ diverge et, par l'absurde, que $\sum v_n$ converge. D'après l'égalité $\sum_{k=1}^n v_k+nv_n=\sum_{k=1}^n u_k$, on obtient $\lim_{n\to+\infty}nv_n=+\infty$ donc, à partir d'un certain rang n_0, on a $nv_n\geqslant 1$ ce qui implique $\sum v_n$ diverge. On a une contradiction donc $\sum v_n$ diverge et les séries ont bien même nature.

Correction 18 On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$ donc on peut faire un DL :

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{1}{2n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{2n(n+1)}\\ &= \frac{(-1)^n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente car c'est une série alternée. La séries de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est également convergente donc la série est convergente.

Correction 19 On suppose que $\sum u_n$ converge et, par l'absurde, que $\sum v_n$ converge. On a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $n^2 u_n \to +\infty$. On en déduit que $u_n v_n \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sqrt{u_n v_n} \sim \frac{1}{n}$. Or $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{u_n + v_n}{2}$ donc c'est le terme général d'une série convergente alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. On a une contradiction donc $\sum v_n$ diverge.

Si $\sum u_n$ diverge, on ne peut rien dire. Pour $u_n = 1$, $\sum v_n$ converge, pour $u_n = \frac{1}{n}$, $\sum u_n$ diverge.

Correction 20 On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ On fait un DL, on obtient

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^n/n^\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$$

Le premier terme du DL est le terme général d'une série convergente (série alternée). On pose $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$. On a alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de même nature. Or $v_n \sim \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$. Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $3\alpha/2 > 1$ soit $\alpha > \frac{2}{3}$.

Correction 21 Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} v_n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k u_k\\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N} \frac{k u_k}{n^2}\\ &= \sum_{k=1}^{N} k u_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Soit $k \geqslant 1$, alors

$$k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{k} + k\sum_{n=k+1}^{N}\frac{1}{n^2}.$$

Or, pour tout $n \in [\![k+1, N]\!]$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ donc

$$\sum_{n=k+1}^{N}\frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n=k+1}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{k}.$$

On a donc

$$k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{k} + 1 \leqslant 2.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{N} u_k.$$

On sait que la suite $\left(\sum_{k=1}^{N} u_k\right)_{N\geqslant 1}$ converge donc elle est majorée. La suite des sommes partielles de $\sum v_n$ est donc majorée et comme la série est de terme général positif, on en déduit qu'elle est convergente.