1 Vrai/faux sur la dimension finie

E désigne un ssev de dimension finie.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

affirmation 1. Soit $\mathscr{F}$ une famille de E avec $\dim(E) = n$. Si $\mathrm{Card}\mathscr{F} < \backslash$, alors $\mathscr{F}$ est libre

affirmation 2. Soit $\mathscr{F}$ une famille de E avec $\dim(E) = n$. Si $\mathrm{Card}\mathscr{F} > \backslash$, alors $\mathscr{F}$ est liée.

affirmation 3. Soit $\mathscr{F}$ une famille de E avec $\dim(E) = n$. Si $\mathrm{Card}\mathscr{F} > \backslash$, alors $\mathscr{F}$ est génératrice de E.

affirmation 4. Si $\mathscr{F}$ est libre, en lui enlevant des vecteurs, on obtient une famille libre.

affirmation 5. Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, en lui ajoutant des vecteurs, on obtient une famille génératrice de E

affirmation 6. Si $\mathscr{F}$ est une famille libre et $\mathrm{Card}\mathscr{F} + 1 < \dim(E)$, alors en ajoutant un seul vecteur, la famille est encore libre

affirmation 7. Si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors en la modifiant par une des trois opérations élémentaires, on obtient une autre base de E.

affirmation 8. Soit F et G deux ssev d'un ev E, si $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

affirmation 9. Si $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$, alors $F+G=E$.

---

affirmation 10. Si $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$ et $F+G=E$ alors F et G sont en somme directe.

---

affirmation 11. Soit F et G deux ssev d'un ev E, si $\dim(F)=\dim(G)$ alors $F\simeq G$.

---

affirmation 12. Soit F un hyperplan de E. Si $x\notin F$, alors $F\oplus \mathrm{Vect}(x)=E$.

---

affirmation 13. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E alors f est un projecteur.

---

affirmation 14. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe, alors ils sont supplémentaires dans E

---

affirmation 15. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ et $g\in GL(E)$, alors $\mathrm{rg}(g\circ f)=\mathrm{rg}(f)$.

---

affirmation 16. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ et $g\in GL(E)$, alors $\mathrm{rg}(f\circ g)=\mathrm{rg}(f)$.

---

2 Solutions du Vrai/Faux sur la dimension finie

Correction 1 faux, si $n \geqslant 3$, $(u, -u)$ pour $u \neq 0_E$ est liée

Correction 2 vrai

Correction 3 Faux, si $u \neq 0_E$ et $n \geqslant 2$, $(u, 2u, \dots, n.u)$ n'est pas génératrice de E.

Correction 4 vrai

Correction 5 vrai

Correction 6 C'est faux, sauf si on lui ajoute un élément qui n'appartient pas à l'espace engendré par cette famille.

Correction 7 vrai

Correction 8

Faux si on ne suppose pas qu'il y a une inclusion

Correction 9

FAUX, prenez $F = G = \text{Vect}(1,0)$, alors $F + G = F \neq \mathbb{R}^2$.

Correction 10

VRAI car $\dim(F+G) = \dim(E)$ et par Grassman, $\dim(F \cap G) = 0$.

Correction 11

VRAI car ils sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{K}^n$ avec n leur dimension commune.

Correction 12

VRAI car la somme est directe et on a égalité des dimensions.

Correction 13

FAUX, prenez $f : (x,y) \mapsto (2x,0)$.

Correction 14

VRAI car, par le thm du rang, on a égalité des dimensions entre E et $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Correction 15

VRAI car deux espaces isomorphes ont même dimension et $\text{Im}(g \circ f) = g\left(\text{Im}(f)\right)$ est isomorphe à $\text{Im}(f)$ par g.

Correction 16

VRAI car $\mathrm{Im}(f \circ g) = f \circ g(E)$ et $g(E) = E$ puisque g est un isomorphisme.
