Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
Feuille 20

TD 20 : Algèbre linéaire en dimension finie.

1 Somme directe et espaces supplémentaires

Exercice 1.
Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ et $\operatorname{vect}\big((1+X+X^2)\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2.
Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$ et $F' = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.
Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x-y=0=x+z\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. puis déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 4.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose $\dim(F)+\dim(G) > \dim(E)$, la somme est-elle directe?
2. On suppose $\dim(F)+\dim(G) \leqslant \dim(E)$, la somme est-elle directe.

Exercice 5.
Montrer que : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ puis donner une base adaptée à cette somme directe.

Exercice 6.
Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z=0=2x-y+2z+t\}.$$

Exercice 7.
Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(2)=0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel et en donner une famille génératrice.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par un polynôme de degré k.

2 Familles libres, génératrices, bases

Exercice 8.
Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ en sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1 &= \big((1,2,3),\ (4,5,6)\big)\\
\mathscr{F}_2 &= \big((1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9),\ (10,11,12)\big)\\
\mathscr{F}_3 &= \big((1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\big)\\
\mathscr{F}_4 &= \big((1,0,0),\ (a,b,0),\ (c,d,e)\big) \qquad (a,b,c,d,e \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Exercice 9.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E. Montrer que la famille :

$$(e_1, e_1+e_2, \cdots, e_1+\cdots+e_n)$$

est une base de E.

Exercice 10.
Soit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z-t = x-3y-2z=0\}$. Déterminer une base et un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de G.

Exercice 11.
Montrer que les polynômes $P_1 = X, P_2 = X-1$ et $P_3 = (X-1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = 2X^2-5X+6$ dans cette base.

Exercice 12.
Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ deux-à-deux distincts. On considère, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, le polynôme :

$$L_i(X) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{j\in\{1,\dots,n\}\\ j\neq i}} (X-a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j\in\{1,\dots,n\}\\ j\neq i}} (a_i-a_j)}.$$

1. Montrer que $(L_1,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
2. On pose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $n=3$ et :

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 1.$$

   (a) Calculer les polynômes L_1, L_2 et L_3
   (b) Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base (L_1,L_2,L_3).

Exercice 13.
Soit $(v_1,\dots,v_k)$ une famille libre de E. Donner le rang des familles suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1 &= (v_1,\ v_1+v_2,\ \dots,\ v_1+v_2+\cdots+v_k)\\
\mathscr{F}_2 &= (v_1-v_2,\ v_2-v_3,\ \dots,\ v_{k-1}-v_k,\ v_k-v_1)\\
\mathscr{F}_3 &= (v_1+v_2,\ v_2+v_3,\ \dots, v_{k-1}+v_k,\ v_k+v_1)
\end{aligned}$$

3 Sous-ev et dimension

Exercice 14.
Déterminer une base et la dimension des ssev suivants :

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + 3y + z = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 = x - 3y\}$.
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Exercice 15.
On note $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = 0\}$. Donner une base de F et sa dimension.

Exercice 16.

1. Montrer que $\mathbb{R}_1[X] = \text{vect}(1 + X, 1 - X)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \text{vect}((1 + X)^2, (1 + X)(1 - X), (1 - X)^2)$.
3. Montrer que $\text{vect}((1, 5, 3), (2, 8, -1)) = \text{vect}((0, 2, 7), (1, 3, -4))$.

Exercice 17.
Soit $E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0\}$,

$F = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n + x_{n+1} = 0\}$ et
$G = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = E$.
2. En déduire la dimension de E.

4 Application linéaire en dimension finie

Exercice 18.
Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y, 2x) \end{array} \right.$ est linéaire et déterminer son image et son noyau.

Exercice 19.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$ ssi n est pair.

Exercice 20.
Montrer qu'il existe une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1, 0, 0) = (1, 0), f(1, 1, 0) = (1, 0) \text{ et } f(1, 1, 1) = (1, 1)$$

Déterminer f et calculer son noyau et son image.

Exercice 21.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, avec E de dimension finie tel que $f^2 = 4id_E$, montrer l'inclusion $\text{Im}(f - 2id_E) \subset \ker(f + 2id_E)$ puis l'égalité $\text{Im}(f - 2id_E) \oplus \text{Ker}(f - 2id_E) = E$.

Exercice 22.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (n + 1)P - XP' \end{array}$

1. Montrer que ϕ est bien définie, et linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(\phi)$.
3. Quel est le rang de ϕ? En déduire que ϕ est surjective.
4. Résoudre l'équation (sur $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$) suivante : $(n + 1)P = XP' + X$.

Exercice 23.
Soit $\phi_A : \begin{array}{ccc} M_{31}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{31}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\ker(\phi_A)$.
2. Quel est le rang de ϕ_A ?
3. Déterminer une base de $\text{Im}(\phi_A)$.

5 Projection

Exercice 24.
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x, y, z, z). \end{array} \right.$

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer son noyau et son image.
3. Donner l'image de $(1, 2, 3, 4)$ par la symétrie d'axe $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$.

Exercice 25.
Soit $\phi_A : \begin{array}{ccc} M_{21}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{21}\mathbb{R} \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ avec $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ_A est un projecteur, et en déterminer les éléments caractéristiques

Exercice 26.
Soit $\phi_A : \begin{array}{ccc} M_{31}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{31}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ avec $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ_A est une symétrie, et en déterminer les éléments caractéristiques.

6 Formes linéaires et hyperplans

Exercice 27.
Soit E de dimension finie et soit f et g des formes linéaires telles que $\forall x \in E, f(x)g(x) = 0$
Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

7 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 28.
Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = P(0) = P(1) = 0\}$,
$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = H$

Exercice 29.
On considère les s.e.v. $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, formés respectivement des matrices :

— diagonales;
— triangulaires supérieures strictes;
— triangulaires inférieures strictes.

Montrer que :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}).$$

Exercice 30.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z = 0 = 2x - y + 2z + t\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 31.
Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Vect}\left((X-1)^2, (X+1)^2\right)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 32.
On pose $u = (1,1,1)$, $v = (0,1,1)$ et $w = (1,1,0)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 33.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x+2y-z = x-y = t = 0\}$. Déterminer une base et un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de F.

Exercice 34.

1. Montrer que $v_1 = (1,-2,3)$, $v_2 = (-2,3,-1)$ et $v_3 = (3,2,1)$ forment un base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner les coordonnées dans cette base des vecteurs suivants : $(0,0,0)$ et $(1,-2,3)$.

Exercice 35.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x+3y+z-2t = 0 \text{ et } x+z = 0\}$

1. Déterminer une base de F et sa dimension.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$ et une base de ce supplémentaire.

Exercice 36.
On note $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0 = P(2)\}$. Donner une base de G et sa dimension.

Exercice 37.
Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$. est linéaire et calculer son noyau et son image.

Exercice 38.
Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x+y, 2z, y+z) \end{array} \right.$ est un automorphisme et expliciter sa bijection réciproque.

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 39.
Soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ deux-à-deux distincts ($k \leqslant n$). Déterminer une base, la dimension et un supplémentaire dans $\mathbb{K}_n[X]$ du s.e.v. :

$$F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(a_1) = \cdots = P(a_k) = 0\}.$$

Exercice 40.
On suppose E de dimension finie.
Montrer que deux s.e.v. de E de même dimension admettent un supplémentaire commun.

Exercice 41.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $u \in Ł(E)$ tels que $\mathrm{Ker}(u) \oplus F = E$. Montrer que $\dim u(F) = \dim F$.

Exercice 42.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension non nulle n, $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
2. Montrer que $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
3. On suppose que, de plus, $f + g$ est un automorphisme de E et $f \circ g = 0$. Montrer que $\ker(f) = Im(g)$.

Exercice 43.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E et soit φ : $\left\{ \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \right.$. Démontrer la formule de Grassman en utilisant φ.

Exercice 44.
Soit $f \in Ł(E)$ telle que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ avec E de dimension finie. Montrer qu'il existe $g \in Ł(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = id_E$.

Exercice 45.
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes.

$$(1)\ \mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \bigoplus \ker(f) \qquad (2)\ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \qquad (3)\ \ker(f) = \ker(f^2)$$

Exercice 46.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que les suites $\mathrm{Im}(u^n)$ et $\ker(u^n)$ sont monotones (pour l'inclusion) et constantes à partir d'un certain rang N.
2. Montrer alors que $E = \ker(u^N) \bigoplus \mathrm{Im}(u^N)$.
3. Démontrer que $F = \ker(u^N)$ et $G = \mathrm{Im}(u^N)$ sont stables par u.
4. On note $g = u|_G$ et $h = u|_F$. Démontrer que g est inversible et h est nilpotent.

Exercice 47.
Soit E de dimension finie, H un hyperplan de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. Supposons que H soit stable par u. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Im}(u - \lambda id_E) \subset H$.

Exercice 48.
Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie $n \geqslant 2$, H_1 et H_2 deux hyperplans, déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Memo

- Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?
  Montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.
- Comment montrer qu'une famille est liée ? montrer que son cardinal est supérieur à la dimension de l'espace.
- Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels ne sont pas en somme directe ?
  Montrer que la somme des dimensions est supérieure strictement à la dimension de l'espace.
- Comment montrer que deux sous-espaces de E sont supplémentaires dans E ?
  - Montrer que la concaténation de deux bases est une base de E.
  - Montrer que la somme est directe et que la somme des dimensions est égale à la dimension de E.
- Comment déterminer un supplémentaire dans E d'un sous-espace vectoriel F ?
  Compléter une base de F en une base de E.
- Comment déterminer l'image d'une application linéaire ?
  - Prendre un élément de l'espace d'arrivée et raisonner par équivalence.
  - Calculer l'image d'une base.
  - Utiliser le théorème du rang : Montrer que l'image est incluse dans un ssev et conclure grâce à la dimension.
- Comment déterminer le noyau d'une application linéaire ?
  - Prendre un élément de l'espace de départ et raisonner par équivalence.
  - Utiliser le théorème du rang si on connait l'image
- Comment déterminer si une application linéaire f est un isomorphisme ?
  - Résoudre l'équation $f(X) = Y$
  - Déterminer le noyau ou l'image et conclure avec le thm du rang.

Indications du td 20

Indication 1 Montrer que la concaténation de deux bases des ssev forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Indication 2 Montrer qu'ils sont en somme directe et utiliser la dimension.

Indication 3 Montrer par analyse-synthèse que tout élément X de $\mathbb{R}^3$ s'écrit $X = a + b$ avec $(a, b) \in F \times G$ et utiliser l'expression de a trouvée dans la phase d'analyse pour déterminer le projeté.

Indication 4 1. Raisonner par l'absurde 2. Trouver un contre-exemple

Indication 6 Compléter une base de F.

Indication 7
1. Utiliser la division euclidienne.
2. Compléter la famille génératrice trouvée à la question 1.
3. Remarquer que pour tout $P \in F$, $\text{Vect}(1+P)$ est un supplémentaire de F.

Indication 9 Exprimer une combinaison linéaire nulle de cette famille comme combinaison linéaire de la base.

Indication 10 Déterminer une base de G et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Indication 11 Montrer que la famille est génératrice et utiliser le système trouvé pour déterminer les coordonnées.

Indication 12
1. Montrer que la famille est libre en utilisant les racines
2. a) au travail b) pensez aux racines des L_i pour déterminer les coordonnées.

Indication 13 Déterminer la dimension de l'espace engendré.

Indication 14 Raisonner par équivalence pour caractériser la forme générale des éléments.

Indication 15 Déterminer la forme générale d'un élément de F.

Indication 16 Raisonner par double inclusion.

Indication 17 1. Raisonner par analyse/synthèse 2. Déterminer la dimension de F et G.

Indication 18 utiliser une matrice, déterminer $\text{Ker}(f)$ puis utiliser le thm du rang.

Indication 19 le thm du rang donne un sens. supposez n pair et envoyez la moitié des éléments sur 0_E et l'autre moitié sur les premiers.

Indication 20 Exprimer les images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Indication 21 Montrer que la somme est directe et conclure avec le théorème du rang.

Indication 22 3. thm du rang 4. expliciter.

Indication 23 1. par équivalence 2. thm du rang 3. Prenez deux éléments non colinéaires.

Indication 24
1. Calculer $f \circ f$.
2. Résoudre $f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ et $f(x, y, z, t) = (x, y, z, t)$.
3. Éxprimer $s(1, 2, 3, 4)$ en fonction de $f(1, 2, 3, 4)$.

Indication 25 Montrer que $\phi_A \circ \phi_A = \phi_A$ puis déterminer son noyau et son image.

Indication 26 Montrer que $s_A \circ s_A = id_{M_{31}(\mathbb{R})}$ puis déterminer $\text{Ker}(s_A + id)$ et $\text{Ker}(s_A - id)$.

Indication 27 prendre x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$ et montrer que $g(x_0) = 0$ en calculant $f(x_0 + y)g(x_0 + y)$.

Indication 28 Raisonner avec les dimensions.

Indication 29 Montrer que tout élément s'écrit comme la somme de 3 éléments des ssev puis montrer l'unicité de l'écriture.

Indication 30 Compléter une base de F.

Indication 31 Compléter la famille $\left((X-1)^2, (X+1)^2\right)$ en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Indication 32 Remarquer qu'elle est de cardinal 3 et montrer qu'elle est libre.

Indication 33 Déterminer une base de F et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Indication 34 Montrer que la famille est libre et déterminer les coordonnées sans calcul.

Indication 35 Déterminer une famille génératrice de F, remarquer qu'elle est libre pour la compléter.

Indication 36 Utiliser la division euclidienne

Indication 37 Utiliser une matrice, déterminer $\ker(\varphi)$ puis utiliser le thm du rang.

Indication 38 Montrer que $f(\lambda U + V) = \lambda f(U) + V$ puis exprimer

Indication 39 Utiliser l'unicité de la division euclidienne pour déterminer une base, compter ses éléments puis compléter la famille en une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Indication 40 si la somme n'est pas directe, compléter une base de l'intersection en une base de F puis de G.

Indication 41 Montrer que $\mathrm{Im}(u) = u(F)$.

Indication 42 1. montrer les deux inégalités 2. utilisez $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ deux fois 3.utilisez tout ce qui précède + thm du rang.

Indication 43 Déterminer $\mathrm{Im}\varphi$ et $\mathrm{Ker}\varphi$.

Indication 44 Montrer que la famille obtenue à l'aide d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et des antécédents forme une base de E puis raisonner par analyse-synthèse avec cette base.

Indication 45 Par double implication.

Indication 46 1. montrer que les dimensions sont nécessairement des suites stationnaires 2. Si $x \in E$, alors $u_N x = U_{2N}(a)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u^N) + \mathrm{Im}(u^N)$ puis montrer que la somme est directe. 3. Utiliser $\mathrm{Im}(u^{N+1}) = \mathrm{Im}(u^N)$. 4. montrer que u_F est un endomorphisme injectif.

Indication 47 Si $x_0 \in E \setminus H$, alors $\mathrm{Vect}(x_0) \oplus H = E$ puis traduire $u(x_0) \in E$

Indication 48 Procéder par disjonction de cas selon que $H_1 = H_2$ ou non.