

---

## Matrices et déterminants

---

Dans tout ce chapitre:

- $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ;
- $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimensions finies** respectives  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La propriété suivante interviendra dans certaines démonstrations :

*Une application linéaire est déterminée par "l'image d'une base".*

Formellement :

**Proposition**(★)

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soient  $u_1, \dots, u_p$  des vecteurs de  $F$ .

Il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad f(e_j) = u_j.$$

**Remarque:** Concrètement, connaître  $f$  revient à connaître les  $p$  vecteurs  $f(e_1), \dots, f(e_p)$ .

## 1 Représentation matricielle

### 1.1 Matrice d'un vecteur et d'une famille

**Définition 1.** Soit  $x \in F$  et  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$ , on sait qu'il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$

tel que  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ . On appelle représentation matricielle de  $x$  dans  $\mathcal{C}$  le vecteur colonne

$$Mat_{\mathcal{C}}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$$

*Exemple 1.* On pose  $B = (1, X, X^2)$ ,  $C = (X^2, X, 1)$  et  $P = 2X^2 + 3X - 1$ , calculer  $Mat_B(P)$  et  $Mat_C(P)$ .

**Définition 2.** Soit  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$  une famille de  $F$  et  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$ , on sait qu'il existe  $a_{ij} \in \mathbb{K}^{np}$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ . On appelle représentation matricielle de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{C}$  la matrice de taille  $n \times p$ :

$$Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_j & \dots & f_p \\ a_{11} & & a_{1j} & & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$$

*Exemple 2.* On pose  $B = (1, X, X^2)$ ,  $C = (X^2, X, 1)$ , calculer les matrices possibles.

## 1.2 Matrice d'une application linéaire

**Définition 3.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soient  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$ .

Comme  $\mathcal{B}'$  est une base de  $F$  :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \exists!(a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n, \quad f(u_j) = a_{1,j}v_1 + \dots + a_{n,j}v_n.$$

La matrice  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est appelée **matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$** . On la note  $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ .

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} f(u_1) & \dots & f(u_j) & \dots & f(u_p) \\ a_{11} & & a_{1j} & & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ij} & & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{np} \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$$

C'est la matrice de la famille  $(f(u_1), \dots, f(u_p))$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

Dans le cas où  $E = F$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ , on note plus simplement  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

**Remarque:** Lorsque  $E = F$ , rien n'empêche néanmoins de choisir deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  distinctes de  $E$ .



$f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\text{Mat}(f) \in \text{Mat}_{np}(\mathbb{K})$  avec  $\dim(E) = p$  et  $\dim(F) = n$ . Le nombre de lignes de la matrice est égale à la dimension de l'espace d'arrivée.

Exemples 3.

1. On considère l'application linéaire  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (y, x + y, x - y) \end{cases}$ . Déterminer la matrice de  $f$  relativement aux bases canoniques de  $E = \mathbb{R}^2$  et  $F = \mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $f$  de l'exemple précédent, déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}(f)$  avec  $\mathcal{E} = (e_2, e_1)$  et  $\mathcal{E}' = (f_1, f_3, f_2)$ .
3. Soit  $f_\lambda : \lambda \in \mathbb{R} \ x \mapsto \lambda x$  un endomorphisme d'un  $ev$   $E$ , écrire  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\lambda)$  où  $\mathcal{B}$  est une base quelconque de  $E$ . La matrice d'une application linéaire se construit en colonne !!
4. Soient  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $F = \mathbb{R}^2$ . Écrire la matrice de l'application linéaire

$$f : \begin{cases} E \rightarrow F \\ P \mapsto (P(0), P'(0)) \end{cases}$$

relativement aux bases canoniques de  $E$  et  $F$ .

5. Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$ . On cherche la matrice de l'endomorphisme

$$f : \begin{cases} E \rightarrow E \\ P(X) \mapsto P(X) + P(X + 1) \end{cases}$$

relativement à la base canonique de  $E$ .

6. Supposons maintenant que je vous donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

en vous disant qu'elle est égale à  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$  où  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ ,  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  et  $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ . Que vaut  $f(1)$ ?  $f(X)$ ?

7. On considère, à nouveau, la matrice  $A$ . On suppose  $A = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(g)$  où  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$  et  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  sont les bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}_2[X]$ . Que vaut  $g(0, 0, 1)$ ?

**Exercice 1.** Soit  $F, G$  deux espaces supplémentaires d'un espace vectoriel  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $C$  une base adaptée à la somme directe  $F \oplus G = E$ . On note  $n = \dim(E)$ ,  $p = \dim(F)$  et  $r = \dim(G)$  (on a donc  $p + r = n$ ). On découpe la matrice ainsi  $\text{Mat}_C(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  avec  $A \in M_p(\mathbb{R}), B \in M_{pr}(\mathbb{R}), C \in M_{rp}(\mathbb{R})$  et  $D \in M_{rr}(\mathbb{R})$ .

1. Si  $B = (0)$  et  $C = (0)$ , que dire de  $u(F)$  et  $u(G)$  ?
2. Si  $A = (0)$  et  $D = (0)$ , que dire de  $u(F)$  et  $u(G)$  ?
3. Si  $C = (0)$  et  $D = (0)$ , que dire de  $\text{Im}(u)$ ?

**Proposition 1.**

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$ .

L'application  $\text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{cases}$  est un isomorphisme.

Concrètement, cela signifie qu'on peut définir la matrice d'une application linéaire dans une base de départ et d'arrivée fixée mais également que toute matrice peut être vue comme la matrice d'une certaine application dans des bases fixées.

**Définition 4.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on appelle endomorphisme canoniquement associé à  $A$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  dont  $A$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

Exemples 4.

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ , où  $\mathcal{B}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , déterminer  $f(x, y, z)$  pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
2. On considère toujours la même matrice. Soit  $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(h) = A$ , où  $\mathcal{B}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}'$  désigne la base  $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ . Déterminer  $h(x, y, z)$ .
3. On considère toujours la matrice  $A$ . Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) = A$ , où  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  désignent les bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}_2[X]$ . Déterminer  $g(x, y, z)$ .

**Remarque.** Dans la démonstration ci-dessus, nous avons dû justifier la bijectivité de  $\text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  car, bien qu'il s'agisse d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, nous ne connaissions pas encore la dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ . On en déduit:

**Corollaire 2.**

L'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie, égale à  $\dim E \times \dim F$ .

### 1.3 Écritures matricielles de $x$ et de $f(x)$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soient  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$ .

Soient  $x \in E$  et  $y \in F$ . On a :

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p && \text{(avec } \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K} \text{)} \\ y &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n && \text{(avec } \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K} \text{)} \end{aligned}$$

On pose :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) = Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Si on pose par ailleurs  $A = \text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ . Alors :

$$\boxed{y = f(x) \iff Y = AX.}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f(x)) = \text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \text{mat}_{\mathcal{B}}(x)}$$

Reprenons certains des exemples du paragraphe précédent :

- En utilisant la matrice  $A$  de l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (y, x + y, x - y) \end{cases}$$

relativement aux bases canoniques  $(e_1, e_2)$  et  $(f_1, f_2, f_3)$  retrouver  $f(1, -2)$ .



Le vecteur que l'on obtient en faisant le produit matriciel n'est pas l'image mais les coordonnées de l'image !!

- Reprenons l'application précédente. La matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{E} = (e_2, e_1)$  et  $\mathcal{E}' = (f_1, f_3, f_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  est

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f) = \begin{pmatrix} f(e_2) & f(e_1) \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_3 \\ f_2 \end{matrix}$$

Déterminer  $f(1, -2)$



Pour éviter d'écrire des bêtises, regarder les espaces de départ et d'arrivée de  $f$ .

- Imaginons que la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  soit désormais la matrice de l'application  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_2[X])$ , les deux espaces étant munis de leurs bases canoniques. Que vaut  $g(1, 1)$ ?

- Encore un exemple pour être sûr : On considère toujours la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Cette fois-ci,  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$  avec  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X], \mathbb{R}_2[X])$  avec  $\mathcal{B} = (X, X + 1)$  et  $\mathcal{B}' = (X^2, X - 1, 1)$ , déterminer  $g(2X - 1)$ .

#### 1.4 Matrice de $g \circ f$

Soit  $G$  un espace vectoriel de dimension finie  $m \in \mathbb{N}$ .

##### Proposition 3.

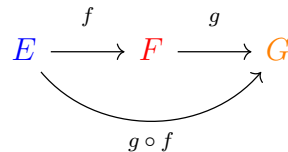
Soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$  des bases de  $E, F$  et  $G$  respectivement.

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . On a :

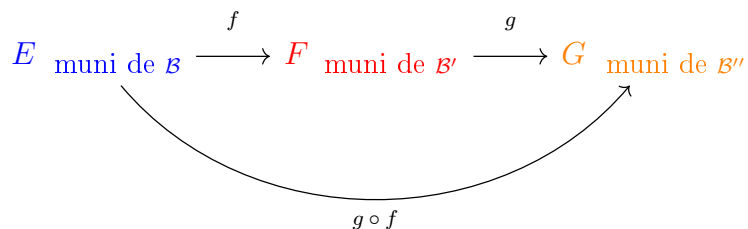
$$\underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f)}_{\in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})} = \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g)}_{\in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})} \times \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)}_{\in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})}$$

##### Remarques:

- On se souvient que pour le produit matriciel, on doit avoir compatibilité des tailles des matrices :  $\mathcal{M}_{mn}$  fois  $\mathcal{M}_{np}$  donne un élément de  $\mathcal{M}_{mp}$ .
- La formule  $\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g)\text{Mat}(f)$  est facile à retenir, elle l'est moins quand on rajoute les bases  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g)\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ . Pour ne pas faire d'erreur sur les bases ou leur ordre (base de l'espace de départ, base de l'espace d'arrivée), faites le schéma suivant :



ou, en rajoutant les bases :



**Remarque.** Si  $f = g$  et  $B = B' = B''$ , on a  $\text{Mat}_B(f^2) = (\text{Mat}_B(f))^2$ . Par une récurrence immédiate, on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Mat}_B(f^n) = (\text{Mat}_B(f))^n$  (notez que pour  $n = 0$ , on a  $f^0 = \text{id}_E$  et  $\text{Mat}_B(f)^0 = I_p$  donc la formule reste vraie).

**Exercice 2.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Supposons  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Montrer l'équivalence :

$$f^n = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \exists B \text{ base de } E, \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.5 Inversibilité et inverse d'une application et de sa matrice

### Théorème 4.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $\dim(E) = \dim(F)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est bijective ;
2. il existe une base de  $E$  et une base de  $F$  dans laquelle la matrice de  $f$  est inversible ;
3. la matrice de  $f$  dans n'importe quelle base de  $E$  et de  $F$  est inversible.

Dans ce cas, si  $A$  est la matrice de  $f$  relativement à une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et une base  $\mathcal{C}$  de  $F$ , alors la matrice de  $f^{-1}$  relativement à ces mêmes bases est  $A^{-1}$ . Autrement dit :  $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)^{-1}$ .

### Corollaire 5.

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible si et seulement si elle admet un inverse à gauche ou à droite.

*Exemple 5.* Montrer que  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto P(X) + P(X+1) \end{cases}$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  à l'aide de sa matrice.

## 2 Noyau, image et rang d'une matrice

### 2.1 Noyau

**Définition 5.** Soit  $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ , on appelle noyau de  $A$ , noté  $\text{Ker}(A)$  l'ensemble :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in M_{p1}(\mathbb{K}), AX = (0)\}.$$

### Proposition 6.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  des bases de  $E$  et  $F$ . On pose  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ , alors

$$\text{Ker}(A) = \{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x), x \in \text{ker}(f)\}.$$

Autrement dit,  $\text{Ker}(A)$  donne les coordonnées des éléments du noyau dans la base  $\mathcal{B}$ .

*Exemples 6.*

1. Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$ ,  $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ ,  $\mathcal{B}' = (X^2, 1, X)$ . On suppose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , déterminer  $\text{Ker}(f)$ .

2. Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto (X+1)P'(X) - 2P \end{cases}$ , déterminer son noyau à l'aide de sa matrice

### Corollaire 7.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , alors  $A$  est inversible si et seulement si  $\text{Ker}(A) = \{0_{M_{n1}(\mathbb{K})}\}$ .

## 2.2 Image et rang d'une matrice

**Définition 6.** Soit  $A \in M_{np}(\mathbb{K})$  une matrice. On appelle image de  $A$ , noté  $\text{Im}(A)$  le sous-espace de  $M_{n1}(\mathbb{K})$  engendré par les colonnes de  $A$ .

### Proposition 8.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  des bases de  $E$  et  $F$ . On pose  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ , alors

$$\text{Im}(A) = \{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(y), y \in \text{Im}(f)\}.$$

Autrement dit,  $\text{Im}(A)$  donne les coordonnées des éléments de l'image dans la base  $\mathcal{B}'$ .

*Exemple:* Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$ ,  $\mathcal{B} = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$ ,  $\mathcal{B}' = (X^2, 1, X)$ . On suppose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On a  $\text{Im}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ , alors  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(X^2 + 1 - X, 2 + X)$ .

**Définition 7.** On appelle **rang** d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  la dimension de son image. Autrement dit, le rang de  $A$  est le rang de la famille de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  composée de ses vecteurs colonnes:

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \left( \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} \right).$$

## 2.3 Lien entre les deux notions.

On rappelle que le rang d'une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est la dimension de l'image de  $f$ :

$$\text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f).$$

Il est aussi le rang de l'image d'une base quelconque de  $E$ , par exemple la base  $\mathcal{B}$ :

$$\text{rg}(f) = \dim \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_p)).$$

### Proposition 9.

Le rang d'une application  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est égale au rang de sa matrice relativement à n'importe quelles bases de  $E$  et de  $F$ :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)).$$

*Exemple* Quel est le rang de l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (y, x + y, x - y) \end{cases} ?$$

## 2.4 Propriétés.

On déduit des propriétés du rang d'une famille de vecteurs

### Proposition 10.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

1.  $\text{rg}(A) = 0 \iff A = (0)$  ;
2.  $\text{rg}(A) = 1$  si et seulement si les colonnes de  $A$  sont colinéaires deux-à-deux et non toutes nulles ;
3.  $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$  ;
4. si  $n = p$  alors :

$$\text{rg}(A) = n \iff A \text{ est inversible.}$$

### Proposition 11.

Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne modifient pas le rang :

- échanger deux colonnes ;
- multiplier une colonne par un scalaire non nul ;
- ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

**Théorème 12** (admis). Une matrice et sa transposée ont même rang :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(A^T).$$

### Corollaire 13.

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifient pas le rang.

## 2.5 Calcul pratique du rang d'une matrice.

Le rang d'une matrice peut être déterminé en pratique en se ramenant, par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, à une matrice triangulaire.

*Exemples 7.*

1. Rang de  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ .

2. Rang de  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .



Le rang d'une matrice triangulaire n'est en général pas égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls.

Exemple 8. rang de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### 3 Matrice de passage

#### 3.1 Définition

**Définition 8.** Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . On appelle matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$  la matrice  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ . Concrètement, c'est la matrice des coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Remarque :**  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{id}_E)$ .

#### Proposition 14.

Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $x \in E$ , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$$

Exemple 9. Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$ , et posons  $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$ , et  $\mathcal{E}' := (X^2, 1 + X, 1 + X^2)$ .

1. Déterminer  $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$  et  $P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$ .

2. Soit  $Q = 6X^2 + X + 3$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{E}'}(Q)$  directement puis à l'aide du travail précédent

#### Proposition 15.

Avec les mêmes notations que le théorème/définition précédent,  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  et  $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$  sont inversibles, et

$$(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

#### 3.2 Formule du changement de base

#### Théorème 16.

Soit  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux bases de  $F$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

En particulier, si  $E = F$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$



## 4.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

**Définition 12.** Le déterminant de  $n$  vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est :  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ .

**Proposition 18.**

Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ , alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

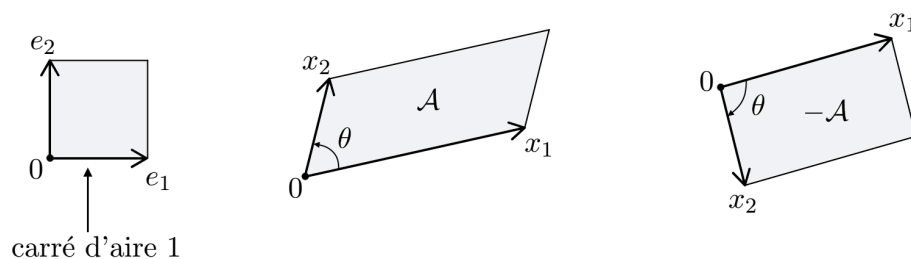
**Théorème 19.**

Une famille de  $n$  vecteurs est liée ssi  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

Par conséquent,  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$  ssi  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

### Interprétation géométrique:

- Lorsque  $E = \mathbb{R}^2$ .** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  la base canonique, et  $\mathcal{F} = (x_1, x_2)$  une famille de deux vecteurs. On note  $\theta$  l'angle orienté entre  $x_1$  et  $x_2$ .

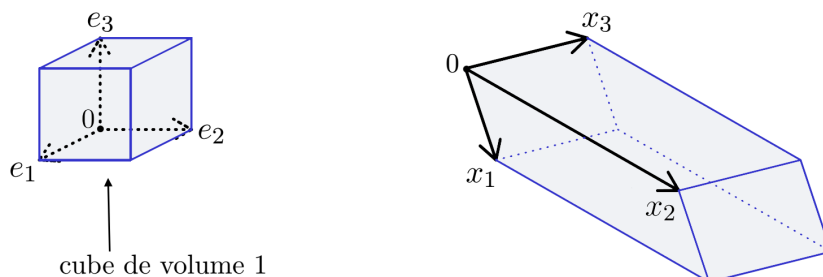


$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)$  est l'aire algébrique du parallélogramme engendré par  $x_1$  et  $x_2$ , c'est-à-dire:

- + l'aire si  $\theta \in [0; \pi]$ ;
- - l'aire si  $\theta \in [-\pi; 0]$ .

Si  $x_1$  et  $x_2$  sont colinéaires, alors l'aire est nulle et réciproquement.

- Lorsque  $E = \mathbb{R}^3$ .** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique, et  $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$  une famille de trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .



$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$  est le volume algébrique du parallélépipède engendré par  $x_1, x_2, x_3$ :

- positif si orienté comme  $(e_1, e_2, e_3)$ ;
- négatif sinon (et nul si coplanaires).

On admet :

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille de  $E$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

*Exemple 10.* La famille  $((1, 2, -1), (1, 1, 1), (-1, 1, 1))$  est-elle libre?

### 4.3 Déterminant d'un endomorphisme

**Définition 13.** Pour un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un ev de dimension finie, il existe un réel  $\alpha$  tel que, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et pour toute base  $\mathcal{B}$  on ait :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Ce réel  $\alpha$  est appelé le déterminant de  $f$ . Il est noté  $\det(f)$ .

#### Proposition 20.

- Le déterminant d'un endomorphisme  $f$  ne dépend pas de la base, on note désormais  $\det(f)$ .
- Pour toute base  $B$  de  $E$ , on a  $\det(f) = \det(\text{Mat}_B(f))$ .

#### Proposition 21.

Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  de dimension  $n$  alors

- $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$
- $\det(\text{id}_E) = 1$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
- $\det(f) \neq 0 \iff f \in GL(E)$ .

### 4.4 Déterminant d'une matrice carrée

On sait déjà calculer le déterminant d'une matrice carrée. On rappelle les propriétés vues dans le chapitre calcul matriciel:

**Proposition 22.**

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

- Le déterminant de  $A$  est multiplié par  $-1$  si l'on permute deux colonnes de  $A$ .
- Le déterminant est multiplié par  $\lambda$  si on multiplie une colonne par  $\lambda$ .
- Le déterminant ne change pas si on ajoute à une colonne de  $A$  une CL des autres colonnes.

**Proposition 23.**

Soit  $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors

- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$  ( $A$  et  $B$  sont des matrices carrées)
- $\det(I_n) = 1$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $A$  est inversible ssi  $\det(A) \neq 0$ . Dans ce cas,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

**Théorème 24.**

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , alors  $\det(A^T) = \det(A)$ .

La conséquence est que l'on sait comment les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice modifie son déterminant! On peut donc alterner les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

**Proposition 25.**

Deux matrices semblables ont même déterminant.