Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2025-2026
DS 8 — Durée : 4h

Devoir surveillé 8.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Le premier qui vient me voir pendant le devoir en disant chocolat gagnera une tablette. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

1. À l'aide d'une somme de Riemann, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{T_n}{n\sqrt{n}}$.
2. En déduire un équivalent simple de T_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 2.

1. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x - y + z = 0\},$$

$$G = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$$

ainsi que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 2x - y + z \end{array} \right.$.

   (a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

   (c) Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner l'expression du projeté sur F parallèlement à G de X.

   (d) Déterminer l'image de $(1, 2, 3)$ par la symétrie d'axe F parallèlement à G.

2. Soit maintenant E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle.

   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$.

On pose $F = Ker(\varphi)$ et $G = Vect(x_0)$.

   (b) Montrer que F et G sont en somme directe.

   (c) Soit $x \in E$. Déterminer $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x - \lambda x_0 \in F$.

   (d) Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

   (e) Soit $x \in E$. Déterminer, en fonction de x, x_0 et φ, l'image de x par le projecteur sur G parallèlement à F.

3. Retrouver le résultat de la question 1c en appliquant la question 2.

Exercice 3. On définit les fonction f et g sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } f(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-x^2} g(x).$$

On considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2xy(x) = 1$$

N.B : on ne sait pas 'calculer' (au sens usuel) de primitive de $t \to e^{t^2}$.

Partie A : Généralités

1. Justifier rapidement l'existence de $g(x)$.
2. Déterminer la parité de f.
3. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
4. Vérifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que c'est l'unique solution de (E) qui vérifie $y(0) = 0$.
5. Trouver toutes les solutions de (E).
6. Calculer un développement limité de g à l'ordre 3 en 0
7. En déduire un développement limité de f à l'ordre 3 en 0
8. En déduire une équation cartésienne de la tangente à sa courbe en le point O, ainsi que la place locale de la courbe par rapport à cette tangente.

Partie B : Variations de f

9. Justifier que f' est strictement positive au voisinage de 0.
10. Démontrer que $f(1) > 0$.
11. En raisonnant par l'absurde, montrer que f' ne peut être strictement positive sur $\mathbb{R}^+$.
12. Montrer qu'il existe un réel strictement positif x_0 tel que $f'(x_0) = 0$.
13. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, h(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Vérifier que h est strictement décroissante et qu'elle est du même signe que f' sur $]0, +\infty$.

14. En déduire que :

$$\forall x \in [0, x_0[, f'(x) > 0 \text{ et } \forall x > x_0, f'(x) < 0$$

15. (a) Montrer que f a une limite finie α en $+\infty$ (pas de calcul).
    (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe c_n tel que

$$f'(c_n) = f(n+1) - f(n).$$

    (c) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $f'(c_n) \to 0$
    (d) En déduire que $f(c_n) \to 0$, puis que $\alpha = 0$.

Partie C : Comportement asymptotique de f en $+\infty$

16. Vérifiez que :

$$\forall x > 0, \int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

17. Soit $x \geqslant 2$.
    (a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{x/2} \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{x^2/4}$.
    (b) Montrer que $\displaystyle\int_{x/2}^{x} \frac{2te^{t^2}}{2t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{4e^{x^2}}{x^3}$.
18. En déduire que

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$$

19. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{2x}\right)$ et en déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 4. Nous noterons $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Soit φ l'application qui, à un polynôme à coefficients réels P (noté indifféremment P ou $P(X)$), fait correspondre le polynôme $\varphi(P)$ défini par la relation

$$\varphi(P)(X) = P(X+1) + P(X)$$

1. Soit $r \in \mathbb{R}^\star$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+r) = P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
   (a) Exprimer $P(X+1)$ en fonction de $P(X)$.
   (b) En déduire une expression de $P(X+2)$ en fonction de $P(X)$.
   (c) En déduire l'injectivité de φ.
4. Soit n un entier naturel.
   (a) Démontrer que l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.
   (b) Démontrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
5. Un réel λ est appelé valeur propre de φ s'il existe un polynôme non nul P_λ tel que $\varphi(P_\lambda) = \lambda P_\lambda$

   Si λ est une valeur propre de φ, on dit alors que l'espace $E_\lambda = \mathrm{Ker}\left(\varphi - \lambda Id_{\mathrm{R}[X]}\right)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.
   (a) Démontrer que 0 n'est pas une valeur propre de φ.
   (b) Démontrer que φ possède une unique valeur propre égale à 2 .
   (c) Déterminer le sous-espace propre de φ (en donner une base).
6. On note $F = X\mathbb{R}[X] = \{XP,\ P \in \mathbb{R}[X]\}$ et $\psi = \varphi - 2Id$.
   (a) Démontrer que F et $\mathbb{R}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Montrer que la restriction de ψ à F est une application injective.
   (c) Pourquoi peut-on affirmer que la restriction de ψ à $X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est injective ?

On admet que ψ induit un isomorphisme de $X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

7. En déduire qu'il existe une suite de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $U_0 = 1$ et pour tout entier non nul n,
$$U_n(0) = 0, U_n(X+1) = U_n(X) + U_{n-1}(X).$$
8. Calculer U_1, U_2 et U_3.
9. Pour tout entier naturel n, déterminer le terme dominant de U_n.
10. Soient n et p deux entiers naturels tels que $p+1 \leqslant n$. Montrer que $U_n(p) = 0$.
11. En déduire la factorisation en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$ du polynôme U_n.
12. Montrer que pour tout entier naturel n, la famille $(U_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction du DS n 8

Correction 1 1. $\forall n \geqslant 1, \dfrac{T_n}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}$.

On pose la fonction $f : t \mapsto \sqrt{t}$. Cette fonction est continue sur le segment $[0,1]$, donc par le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\frac{T_n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

2. On en déduit que $\dfrac{T_n}{n\sqrt{n}} \sim \dfrac{2}{3}$, c'est-à-dire $\boxed{T_n \sim \dfrac{2\,n^{3/2}}{3}}$.

Correction 2 1. (a) On remarque que $F = \mathrm{Ker}(f)$ avec f une application linéaire, on peut donc affirmer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On peut aussi montrer que F est non-vide et stable par combinaison linéaire.

(b) On va raisonner par analyse-synthèse car cela nous fera gagner du temps pour les deux questions suivantes.

Analyse : : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on suppose qu'il existe $(a, 2a+c, c) \in F$ et $(\lambda,\lambda,\lambda) \in G$ tel que $(a,2a+c,c)+(\lambda,\lambda,\lambda) = (x,y,z)$. On a alors, par unicité des coordonnées :

$$\begin{cases} a+\lambda & = x \\ 2a+c+\lambda & = y \\ c+\lambda & = z \end{cases}$$

On fait $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} a+\lambda & = x \\ c-\lambda & = y-2x \\ c+\lambda & = z \end{cases}$$

puis $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_3$ et $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 - \frac{1}{2}L_2$. On obtient

$$\begin{cases} a+\lambda & = x \\ c & = \dfrac{y-2x+z}{2} \\ \lambda & = \dfrac{z-y+2x}{2} \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a & = \dfrac{z-y}{2} \\ c & = \dfrac{y-2x+z}{2} \\ \lambda & = \dfrac{y-z+2x}{2} \end{cases}$$

Synthèse : : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\begin{cases} a & = \dfrac{y-z}{2} \\ c & = \dfrac{y-2x+z}{2} \\ \lambda & = \dfrac{z-y+2x}{2} \end{cases}$$

et $U = (a, 2a+c, c)$, $V = \lambda(1,1,1)$. On doit montrer que

— $U \in F$ (clair)

— $V \in G$ (clair)

— $U+V = (x,y,z)$.

On montre le dernier point : $a+\lambda = x$, $2a+c+\lambda = y$ et $c+\lambda = z$.
On a montré que tout élément (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ s'écrivait comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. De plus, d'après la phase d'analyse, cette écriture est unique.

$\boxed{\text{Les deux espaces } F \text{ et } G \text{ sont donc supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$

(c) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, d'après la question précédente,

$$(x,y,z) = \left(\frac{y-z}{2}, \frac{3y-2x-z}{2}, \frac{y-2x+z}{2}\right) + \left(\frac{z-y+2x}{2}, \frac{z-y+2x}{2}, \frac{z-y+2x}{2}\right),$$

, l'image de (x,y,z) par la projection sur F parallèlement à G de (x,y,z) est donc

$$\boxed{\left(\frac{y-z}{2},\frac{3y-2x-z}{2},\frac{y-2x+z}{2}\right)}$$

(d) On écrit $(1,2,3)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. L'image de $(1,2,3)$ par la symétrie d'axe F parallèlement à G est donc

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=(-2,-1,0).}$$

2. Soit maintenant E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi : E\to\mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle.

(a) L'application étant non identiquement nulle, il existe au moins une image non nulle, il existe donc $x_0\in E$ tel que $\varphi(x_0)\neq 0$.

Il n'est pas nécessaire de raisonner par l'absurde. On pose $F=Ker(\varphi)$ et $G=Vect(x_0)$.

(b) Montrons que F et G sont en somme directe. Soit $x\in F\cap G$, alors $\varphi(x)=0$ et $x=\lambda x_0$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$. On a donc $\varphi(x)=\lambda\varphi(x_0)$ par linéarité de φ; or, on a supposé $\varphi(x_0)\neq 0$, on a donc $\lambda=0$ donc $x=0_E$. Ainsi, $F\cap G\subset\{O_E\}$ et l'autre inclusion est claire donc la somme est directe.

Là encore, pas besoin de supposer par l'absurde que x est non-nul.

(c) Soit $x\in E$. On cherche $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $x-\lambda x_0\in F$. On veut donc $\varphi(x-\lambda x_0)=0$ d'où, par linéarité de φ, $\varphi(x)=\lambda\varphi(x_0)$. Comme $\varphi(x_0)\neq 0$, on peut poser $\boxed{\lambda=\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}}$.

(d) Soit $x\in E$, alors $x=\underbrace{x-\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0}_{\in F}+\underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0}_{\in G}$. Tout élément de E s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G, on a donc $E\subset F+G$ et l'autre inclusion est claire donc il y a égalité. On a montré, précédemment, que les espaces étaient en somme directe, ils sont donc supplémentaires dans E.

Il est inutile de faire un analyse-synthèse, vous avez déjà fait le travail dans les deux questions précédentes.

(e) Soit $x\in E$. D'après la question précédente, l'image de x par le projecteur sur G parallèlement à F est $\boxed{dfrac\varphi(x)\varphi(x_0)x_0}$.

3. On remarque que f est une forme linéaire non nulle et $\mathrm{Ker}(f)=F$. Par ailleurs $f(1,1,1)=2\neq 0$ donc on peut poser $x_0=(1,1,1)$. L'image de (x,y,z) par le projeté sur F parallèlement à G est donc

$$\begin{aligned}(x,y,z)-\frac{f(x,y,z)}{f(1,1,1)}(1,1,1) &= (x,y,z)-\frac{2x-y+z}{2}(1,1,1)\\ &=\left(\frac{y-z}{2},\frac{3y-2x-z}{2},\frac{z-2x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de la question 1c.

Correction 3 Partie A : Généralités

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto e^{t^2}$ est continue sur l'intervalle $[0,x]$ (ou $[x,0]$ si $x<0$), $\boxed{g \text{ est donc bien définie sur } \mathbb{R}}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f(-x) &= e^{-(-x)^2}\int_0^{-x}e^{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= e^{-x^2}\int_0^{x}e^{(-u)^2}(-1)\,\mathrm{d}u \text{ en posant } u=-t\\ &= -e^{-x^2}\int_0^{x}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= -f(x) \text{ car la variable d'intégration est muette}\end{aligned}$$

On a donc $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=-f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

Il faut impérativement savoir faire cette question, en sachant qu'il faut faire un changement de variable ET en ne se trompant pas dans le changement de variable dans une intégrale.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{t^2} \geqslant 0$.
   — Si $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive entre des bornes croissantes. On en déduit que $f(x) \geqslant 0$.
   — Si $x < 0$, on a, par imparité de f, $f(x) = -f(-x)$ avec $-x \geqslant 0$ donc $f(x) \leqslant 0$.

   On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) \text{ est du même signe que } x.}$

4. On commence par montrer que f est dérivable. Par le thm fondamental de l'analyse, g est dérivable car $t \mapsto e^{t^2}$ est continue et sa dérivée vaut $g' : x \mapsto e^{x^2}$. Sa dérivée g' est C^∞ donc g l'est aussi. Par produit de deux fonctions de classe C^∞, on en déduit que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t + e^{-x^2}.e^{x^2} = 1 - 2xf(x).$$
   On a montré que f est solution de (E). On a bien $f(0) = 0$. Par le thm de Cauchy, la fonction f est l'unique solution de (E) qui vérifie $y(0) = 0$.

5. On a trouvé une solution particulière de (E), il suffit donc de déterminer les solutions de l'équation homogène associée : $y' + 2xy = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-x^2}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme
$$\boxed{x \mapsto \lambda e^{-x^2} + f(x), \lambda \in \mathbb{R}.}$$

6. Pour calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de g, on va intégrer le DL suivant :
$$e^{t^2} = 1 + t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2).$$
   On a $g(0) = 0$ donc
$$\boxed{g(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3).}$$
   La primitivation d'un DL est un thm du cours, l'intégration d'un DL entre deux bornes finies non donc éviter de l'écrire même si on comprend ce que vous avez voulu dire.

7. On a également $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$ donc
$$f(x) = \left(1 - x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right).\left(x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) = \boxed{x - \frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3).}$$

8. D'après la question précédente et par unicité du DL, on en déduit que l'équation de la tangente au graphe de f en le point d'abscisse $x = 0$ est $\boxed{y = x}$. Par ailleurs, on a $f(x) - x \sim_{x\to 0} \dfrac{-2x^3}{3}$ donc les deux quantités sont localement de même signe. On en déduit que la courbe est au dessus de la tangente pour $x < 0$ puis en dessous.

Partie B : Variations de f

9. On a sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2xf(x) = 1$ et $f(0) = 0$ donc $f'(0) = 1 > 0$. Comme f' est continue, on en déduit que $\boxed{f' \text{ strictement positive au voisinage de } 0}$.

   Cette question a donné lieu a des calculs très compliqués et justifications approximatives.

10. On a $f(1) = e^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $e^{-1} > 0$. Montrons que l'intégrale est strictement positive. C'est l'intégrale d'une fonction positive, continue et non identiquement nulle entre des bornes croissantes. Par stricte positivité de l'intégrale, on en déduit que cette intégrale est strictement positive. $\boxed{\text{On a bien } f(1) > 0.}$

    La stricte positivité de l'intégrale s'applique pour une fonction CONTINUE

11. On suppose, par l'absurde, que sur $\mathbb{R}^+$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $2xf(x) \leqslant 1$. Par ailleurs, pour tout $x > 1$, $f(x) > f(1) > 0$. Or pour

tout $x > 0$, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$ donc, en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ce qui contredit l'affirmation " pour tout $x > 1$, $f(x) > f(1) > 0$".

Par l'absurde, on a montré que $\boxed{f' \text{ ne peut être strictement positive sur } \mathbb{R}^+.}$

12. On a montré par l'absurde, à la question précédente, que f' n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, il existe donc un réel positif x_1 tel que $f'(x_1) \leqslant 0$.
    - Si $f'(x_1) = 0$, on pose $x_0 = x_1$. Comme $f'(0) = 1$, on a bien $x_0 > 0$.
    - Sinon, on applique le TVI à f' entre 0 et x_1, on obtient l'existence de $x_0 \in]0, x_1[$ tel que $f'(x_0) = 0$ et on a bien $x_0 > 0$.

   Dans les deux cas, on a montré qu' $\boxed{\text{il existe } x_0 > 0 \text{ tel que } f'(x_0) = 0}$.

   Beaucoup d'erreurs dans la traduction de " f' n'est pas strictement positive".

13. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, h(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   La fonction h est dérivable par les théorèmes usuels et, pour tout $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{-e^{x^2}}{2x^2}$, la fonction h est donc strictement décroissante. Par ailleurs, pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = 1 - 2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 2xe^{-x^2}h(x)$, on en déduit que $\boxed{h \text{ et } f' \text{ sont de même signe sur }]0, +\infty.}$

14. D'après la question précédente, $f'(x_0) = 0 = 2x_0e^{-x_0^2}h(x_0)$. Comme $x_0 \neq 0$, on en déduit que $h(x_0) = 0$ et, comme h est décroissante, on en déduit que $h(x) > 0$ pour $x \in [0, x_0[$ puis $h(x) < 0$ pour $x > x_0$. On en déduit, comme f' et h sont de même signe sur $\mathbb{R}^+$, que

$$\boxed{\forall x \in [0, x_0[, f'(x) > 0 \text{ et } \forall x > x_0, f'(x) < 0.}$$

   Attention : même signe ne signifie pas même point d'annulation ! $x \mapsto \sin^2(x).\cos(x)$ et cos sont de même signe mais ne s'annule pas au mêmes points.

15. (a) D'après la question précédente, f est décroissante sur $]x_0, +\infty[$. Par le thm de limite monotone, elle admet donc une limite en $+\infty$. Cette limite ne peut être égale à $-\infty$ car f est positive sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc finie. On a montré que $\boxed{f \text{ a une limite finie } \alpha \text{ en } +\infty.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique le thm des accroissements finis à f continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$: Il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que $\boxed{f'(c_n) = \dfrac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f(n+1) - f(n)}$.

   Quand vous citez un théorème, citez ses hypothèses.

   (c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \alpha$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(f(n+1) - f(n)\big) = \alpha - \alpha = 0$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) - f(n) = f'(c_n)$, on a bien $\boxed{f'(c_n) \to 0}$.

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f'(c_n) + 2c_nf(c_n) = 1$ donc $2c_nf(c_n) \to 1$. Par ailleurs, $c_n \to +\infty$ par le thm de minoration car $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \geqslant n$. On en déduit que $f(c_n) \sim \dfrac{1}{1c_n}$ donc $f(c_n) \to 0$. On sait également que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(c_n) = \alpha$ d'où $\alpha = 0$ par unicité de la limite.

Partie C : Comportement asymptotique de f en $+\infty$

16. Soit $x > 0$. On fait une intégration par parties en écrivant

$$\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{2te^{t^2}}{2t}\,\mathrm{d}t,$$

   et en posant $u(t) = \dfrac{1}{2t}$, $v'(t) = 2te^{t^2}$. On a donc $v(t) = e^{t^2}$ et $u'(t) =$

$-\dfrac{1}{2t^2}$. On a donc

$$\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

On a bien l'égalité souhaitée.

Cette partie a été peu abordée et peu réussie. Reprenez bien les majorations pour les comprendre et savoir les refaire.

17. Soit $x \geqslant 2$.

   (a) Comme $x \geqslant 2$, $\dfrac{x}{2} \geqslant 1$ donc les bornes sont croissantes. De plus, pour tout $t \in \left[1, \frac{x}{2}\right]$, $e^{t^2} \leqslant e^{(x/2)^2}$. Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_1^{x/2} \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{x/2} \frac{e^{x^2/4}}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

   donc

$$\int_1^{x/2} \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{x^2/4}\int_1^{x/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

   On a

$$\int_1^{x/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{x/2} = 1 - \frac{2}{x} \leqslant 1,$$

   On a donc bien :

$$\boxed{\int_1^{x/2} \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{x^2/4}.}$$

   (b) Pour tout $t \in \left[\dfrac{x}{2}, x\right]$, on a $\dfrac{1}{2t^3} \leqslant \dfrac{4}{x^3}$ donc

$$\int_{x/2}^x \frac{2te^{t^2}}{2t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{4}{x^3}\int_{x/2}^x 2te^{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

   et

$$\int_{x/2}^x 2te^{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[e^{t^2}\right]_{x/2}^x \leqslant e^{x^2}.$$

   On a donc bien $\boxed{\displaystyle\int_{x/2}^x \frac{2te^{t^2}}{2t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{4e^{x^2}}{x^3}}$.

18. Soit $x \geqslant 2$, on écrit

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_1^{x/2} \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{x/2}^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ par la relation de Chasles} \\ &= \int_1^{x/2} \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{x/2}^x \frac{2te^{t^2}}{2t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{x^2/4} + \frac{4e^{x^2}}{x^3} \\ &\text{d'après les deux questions précédentes} \end{aligned}$$

On a donc

$$0 \leqslant \frac{2x}{e^{x^2}}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2xe^{x^2/4}}{e^{x^2}} + \frac{8}{x^2}.$$

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2xe^{x^2/4}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{3x^2/4}} = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x^2} = 0$ donc, par le thm des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{x^2}}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

On a donc bien

$$\boxed{\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)}$$

19. D'après la question 16, on a

$$e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x} - \frac{e.e^{-x^2}}{2} + e^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$, donc

$$e^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{2x}\right).$$

Par ailleurs, $\dfrac{e.e^{-x^2}}{2} = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{2x}\right)$ par croissances comparées. Ainsi,

$$e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{2x}\right).$$

Enfin, on écrit

$$f(x)=e^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t+e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

et on remarque que $0\leqslant\int_0^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant e$. On en déduit, toujours par croissances comparées, que $e^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t=\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{2x}\right)$. Ainsi,

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2x}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{2x}\right).}$$

On en déduit que $\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}.}$

Correction 4 1. Soit $r\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+r)=P(X)$. On suppose, par l'absurde, P non constant. On sait que P admet une racine complexe α d'après le thm de d'Alembert Gauss. D'après la relation, $\alpha+r$ est alors également racine de P. On en déduit alors que $\alpha+2r$ est racine de P puis, par récurrence immédiate, que $\alpha+kr$ est racine de P pour tout $k\in\mathbb{N}$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines, il est par conséquent nul ce qui est absurde puisque l'on a supposé P non constant. Par l'absurde, on a montré que $\boxed{P \text{ est un polynôme constant.}}$

L'identification $(X+r)^k$ à X^k m'a vraiment fait pleurer les yeux!!! Quand vous identifiez, réfléchissez à ce qui vous permet d'identifier (unicité des coordonnées, famille libre, unicité des coefficients..)

2. Soit $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q)&=(\lambda P+Q)(X+1)+(\lambda P+Q)(X)\\&=\lambda P(X+1)+Q(X+1)+\lambda P(X)+Q(X)\\&=\lambda(P(X+1)+P(X))+(Q(X+1)+Q(X))\\&=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)\end{aligned}$$

l'application $\boxed{\varphi \text{ est bien linéaire}}$. De plus, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P)\in\mathbb{R}[X]$ donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$

3. Soit $P\in\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   (a) On a $\varphi(P)=0$ donc $\boxed{P(X+1)=-P(X).}$
   J'ai enlevé la moitié des points à ceux/celles qui ont fait un raisonnement par équivalence sans conclure, la prochaine fois, ce sera 0.
   (b) On a donc $\boxed{P(X+2)=-P(X+1)=P(X).}$
   (c) D'après la première question avec $r=2$, on en déduit que P est constant. Or, si $P=k$, on a $P(X+1)=k$ donc $k=-k$ ce qui impose $k=0$. On a montré que le noyau de φ ne contient que le polynôme nul, $\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est donc injective.}}$
4. Soit n un entier naturel.
   (a) Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg(\varphi(P))\leqslant\max\big(\deg(P),\deg(P(X+1))\big)\leqslant n$ donc $\varphi(P)\in\mathbb{R}_n[X]$ et $\boxed{\text{l'espace vectoriel } \mathbb{R}_n[X] \text{ est bien stable par } \varphi.}$

   N'écrivez surtout pas qu'un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ est de degré n, c'est FAUX!!!
   (b) On sait déjà que φ est injective, montrons qu'elle est surjective. Soit donc $Q\in\mathbb{R}[X]$, alors il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $Q=\sum_{k=0}^n a_kX^k\in\mathbb{R}_n[X]$. On veut montrer qu'il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P)=Q$. On cherche P sous la forme $P=\sum_{k=0}^n b_kX^k$. En effet, si on note a_mX^m le terme dominant de P non nul, il est facile de voir que le terme dominant de $\varphi(P)$ est $2a_mX^m$.
   On a $\sum_{k=0}^n b_k(X+1)^k=\sum_{k=0}^n b_k\sum_{j=0}^k\binom{j}{k}X^j=\sum_{j=0}^n\left(\sum_{k=j}^n b_k\binom{j}{k}\right)X^j$ donc, les indices étant muets : On a

$$\varphi(P)=\sum_{k=0}^n\left(\sum_{i=k}^n\binom{k}{i}b_i\right)X^k+\sum_{k=0}^n b_kX^k=\sum_{k=0}^n\left(b_k+\sum_{i=k}^n\binom{k}{i}b_i\right)X^k.$$

   Par unicité des coefficients, on a

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ b_k+\sum_{i=k}^n\binom{k}{i}b_i=a_i,$$

ou encore
$$\forall k \in [\![0,n]\!], 2b_k + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{k}{i} b_i = a_k.$$
On explicite pour se convaincre que le système est triangulaire :
$$\begin{cases} 2b_0 + b_1 + \dots & = a_0 \\ 2b_1 + 2b_2 + \dots & = a_1 \\ \vdots & = \vdots \\ 2b_n & = a_n \end{cases}$$
Le système admet bien une solution (qui est unique mais on le savait déjà), ainsi

$\boxed{\text{tout polynôme } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ admet un antécédent dans } \mathbb{R}[X] \text{ (de même degré).}}$

Cette question n'avait aucun rapport avec la précédente (que j'avais gardée uniquement pour vérifier si vous saviez ce que signifiait " être stable par".

5. Un réel λ est appelé valeur propre de φ s'il existe un polynôme non nul P_λ tel que $\varphi(P_\lambda) = \lambda P_\lambda$

   Si λ est une valeur propre de φ, on dit alors que l'espace $E_\lambda = \operatorname{Ker}\left(\varphi - \lambda Id_{\mathbb{R}[X]}\right)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

   (a) On a montré que $\ker\varphi = \{0\}$, il n'existe donc pas de polynôme $P \neq 0$ tel que $\varphi(P) = 0$ donc $\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } \varphi.}$

   (b) On suppose que λ est valeur propre de φ. Il existe donc $P \neq 0$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$. On note a_m son coefficient dominant, le terme dominant de $\varphi(P)$ est $2a_m$. Le terme dominant de λP est λa_m, on a donc $\lambda a_m = 2a_m$ et comme $a_m \neq 0$, on a $\lambda = 2$. Si λ est valeur propre de φ, alors $\lambda = 2$. Réciproquement, montrons que 2 est valeur propre de φ Pour cela, il faut montrer qu'il existe un polynôme non nul P tel que $\varphi(P) = 2P$.

   On peut remarquer qu'un polynôme constant vérifie l'égalité (par exemple $P = 1$), on a donc bien 2 valeur propre. Si on ne le voit pas, on cherche P sous la forme $\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. En reprenant les calculs fait précédemment pour la surjectivité, les coefficients de P doivent vérifier :
$$\forall k \in [\![0,n]\!], 2b_k + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{k}{i} b_i = 2b_k,$$
   donc
$$\begin{cases} b_1 + b_2 + \dots & = 0 \\ 2b_2 + 3b_3 + \dots & = 0 \\ \vdots & = \vdots \\ nb_n & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$
   On obtient $\forall k \geqslant 1, b_k = 0$ donc $P = b_0$. En prenant $b_0 \neq 0$, on a bien l'existence d'un polynôme non nul vérifiant $\varphi(P) = 2P$, ainsi $\boxed{2 \text{ est la seule valeur propre de } \varphi.}$

   (c) On souhaite déterminer le sous-espace propre de φ c'est-à-dire $\ker(\varphi - 2Id)$. On a montré à la question précédente que pour $P \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, on a $\varphi(P) = 2P \Leftrightarrow P = b_0$. Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi - 2Id) = \mathbb{R} = \operatorname{Vect}(1).}$

   Une base de son sous-espace propre est, par exemple, la famille contenant le polynôme constant égal à 1.

6. On note $F = X\mathbb{R}[X]$ et $\psi = \varphi - 2Id$.

   (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, alors $P = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k X^k}_{\in F} + \underbrace{b_0}_{\in\mathbb{R}}$ donc

   $\mathbb{R}[X] \subset F + \mathbb{R}$ et l'autre inclusion est claire, on a donc l'égalité. De plus, la somme est clairement directe car si P est constant et qu'il appartient à F, alors il admet 0 pour racine donc il est nul. On peut aussi dire que la somme est directe car l'écriture est unique par unicité des coefficients

On en déduit que $\boxed{\text{les deux espaces sont supplémentaires dans } \mathbb{R}[X].}$

Pas besoin de faire une analyse-synthèse ici, la décomposition est facile à trouver.

(b) On a

$$\mathrm{Ker}\psi|_F = \{P \in F, P \in \mathrm{Ker}(\varphi - 2Id)\} = \{P \in F, P \in \mathbb{R}\} = F \cap R = \{0\}.$$

On en déduit que $\boxed{\text{l'application } \psi|_F \text{ est une application injective.}}$

(c) On peut affirmer que que la restriction de ψ à $X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est injective car $X\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset F$ et on a montré que $\boxed{\psi|_F \text{ est une application injective.}}$

Remarque : la question initiale était "montrer que ψ induit un isomorphisme de $X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{R}_{n-1}[X]$". Il suffisait de remarquer que les deux ssev $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ était de même dimension finie. L'injectivité de $\psi|_{X\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ donnait alors sa bijectivité.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, on remarque que

$$\begin{aligned} U_n(X+1) = U_n(X) + U_{n-1}(X) \quad &\Leftrightarrow U_n(X+1) - U_n(X) = U_{n-1}(X) \\ &\Leftrightarrow \psi(U_n) = U_{n-1}. \end{aligned}$$

On a $U_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ donc il existe un unique polynôme $U_1 \in X\mathbb{R}_0[X]$ tel que $\psi(U_1) = U_0$. Comme $U_1 \in X\mathbb{R}_0[X]$, on a bien $U_1(0) = 0$. On a $U_1 \in X\mathbb{R}_0[X] \subset \mathbb{R}_1[X]$, il admet donc un unique antécédent dans $X\mathbb{R}_1[X]$, que l'on note U_2 et qui vérifie $U_2(0) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit ainsi U_n comme l'unique antécédent de U_{n-1} dans $X\mathbb{R}_{n_1}[X]$.

Personne n'a traité celle-ci ni les suivantes.

8. On a $U_1 = X$, $U_2(X+1) - U_2(X) = X$. On remarque que le polynôme $\boxed{U_2(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X}$ convient. Pour U_3, on cherche de degré au plus 3 (puisque U_2 est de degré 2. On le cherche donc sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX$. Par unicité des coefficients, on a

$$\begin{cases} 3a &= \frac{1}{2} \\ 3a + 2b &= -1 \\ a + b + c &= 0 \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{cases} a &= \frac{1}{6} \\ b &= -\frac{1}{2} \\ c &= \frac{1}{3} \end{cases}$$

On a donc $\boxed{U_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}.}$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{HR}(n)$: " le terme dominant de U_n est $\frac{1}{n!}X^n$." L'hypothèse de récurrence est vraie aux rangs $0, 1, 2$ et 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{HR}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathrm{HR}(n+1)$ est également vraie. On sait déjà que $U_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on peut donc écrire $U_{n+1} = a_{n+1}X^{n+1} + a_nX^n + Q_n(X)$ avec $\deg(Q_n) \leqslant n-1$.
On a

$$\begin{aligned} \psi(U_{n+1}) &= U_{n+1}(X+1) - U_{n+1}(X) \\ &= a_{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}X^k + a_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k + Q_n(X+1) - a_{n+1}X^{n+1} - a_nX^n - Q_n(X) \\ &= (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}X^k + a_n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^k + Q_n(X+1) - Q_n(X) \end{aligned}$$

le terme dominant de $\psi(U_{n+1})$ est $(n+1)a_{n+1}X^n$, il doit être égal au terme dominant de U_n, c'est-à-dire $\frac{1}{n!}X^n$ par hypothèse de récurrence. On a donc $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ et le terme dominant de U_{n+1} est $\frac{1}{(n+1)!}X^{n+1}$.

Par le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout entier } n, \text{ le terme dominant de } U_n \text{ est } \frac{1}{n!}X^n.}$

10. Pour $n = 1$, on a $U_1(0) = 0$; pour $n = 2$, on a $U_2(0) = U_2(1) = 0$ (et on peut aussi vérifier que $0, 1$ et 2 sont racines de U_3 mais c'est plus long.

    On intuite donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in [\![0, n-1]\!]$, $U_n(p) = 0$.

    Pour tout entier naturel p, on pose HR(p) :" $\forall n > p, U_n(p) = 0$." On veut montrer que HR(p) est vraie pour tout entier p

    La propriété est initialisée pour $p = 0$. Soit p tel que HR(p) est vraie. Soit $n > p+1$, montrons que $U_n(p+1) = 0$. On a $U_n(p+1) = U_n(p) + U_{n-1}(p)$. On a $n > p+1 > p$ donc $U_n(p) = 0$ et $n-1 > p$ donc $U_{n-1}(p) = 0$ par hypothèses de récurrence. On en déduit que $U_n(p+1) = 0$. La propriété est héréditaire. On a montré qu'elle est vraie pour tout entier p par le principe de récurrence donc

    $$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \forall p \in [\![0, n-1]\!],\ U_n(p) = 0.}$$

11. On a vu que U_n est de degré n, de coefficient dominant $\frac{1}{n!}$ et on a trouvé n racines : les entiers de 0 à $n-1$. On en déduit que

    $$\boxed{U_n(X) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k).}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k U_k = 0$.

    On évalue l'égalité en 0, on obtient $\lambda_0 = 0$ car $U_0(0) = 1$ et $\forall k \geqslant 1, U_k(0) = 0$.

    On évalue ensuite l'égalité en 1. Comme 0 est l'unique racine de U_1, on a $U_1(1) \neq 0$ et 1 étant racine de U_k pour $k \geqslant 2$, on obtient $\lambda_1 = 0$.

    Par récurrence immédiate, on montre que tous les λ_k sont nuls, $\boxed{\text{la famille est bien libre.}}$

    Remarque : La question initiale était de montrer que c'était une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffisait de montrer qu'elle était libre puis de dire que c'était une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ pour conclure.