Réponses du TD n 21

Réponse 1

$$Mat_B(f)=\begin{pmatrix}2&1&7\\0&1&1\\1&1&4\end{pmatrix}$$

Réponse 2 $\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&2&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$

Réponse 3 1. $\begin{pmatrix}-1&-1&-6\\0&0&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. $Mat_{B'}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.
3. $Mat_{B"}(f)=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Réponse 4 1. $f(x,y,z)=(x+2y-z,2x+y+z,2y+2z)$.

2. Soit $P=aX^2+bX+c$, $g(P)=(c+2b-a)+(2c+b+a)X+(2b+2a)X^2$.
3. Soit $P=aX^2+bX+c$, $h(P)=(c+2b-a,2c+b+a,2b+2a)$

Réponse 6 1. $\text{Ker}(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. $\text{Ker}(f)=\text{Vect}\left((2,2,1),(-1,-2,-2)\right)=\text{Vect}\left((2,2,1),(1,2,2)\right)$.
$\text{Im}(f)=\text{Vect}\left((0,-1,1)\right)$.

2. $\text{Ker}(u)=\text{Vect}\left(2X^2+2,-X^2+4X-3\right)=\text{Vect}\left(X^2+1,2X-1\right)$, $\text{Im}(u)=\text{Vect}\left(-6X-2\right)=\text{Vect}\left(3X+1\right)$.

Réponse 7 1. $\text{Ker}(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$. $\text{Ker}(u)=\text{Vect}\left(2X^2+2X+4\right)$ et $\text{Im}(u)=\text{Vect}\left((1,2,6),(5,6,0)\right)$.

2. $u(3X^2-2X-1)=(11,14,6)$.
3. la matrice n'est donc pas inversible.
4.

$$Mat_{B'C}(u)=\begin{pmatrix}0&1&0\\3&-5&0\\2&-3&0\end{pmatrix}$$

Réponse 8 1. de rang 2 si $\alpha=0$, de rang 3 sinon.

2. Si $\alpha=0$:
$\text{Ker}(f)=\text{Vect}(e_1-e_3,e_2-e_4)$. (e_1,e_2) est une base de $\text{Im}(f)$.
Si $\alpha\neq 0$.
$\text{Ker}(f)=\text{Vect}(e_1-e_3)$ $\left(f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)\right)$ base de $\text{Im}(f)$.

Réponse 10 1. 1 et 4

2. $\text{Ker}(u-id)=\text{vect}\left((1,-1,0),(0,1,-1)\right)$ et $\text{Ker}(u-4id)=\text{Vect}\left((1,1,1)\right)$.
3. concaténation des bases est une base
4. pour $Q=P_{BB'}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$,
5. A inversible.

Réponse 12 $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 2x-z+y=0\}$

Réponse 14 oui

Réponse 15 pour $m=0,2$ et -1, la matrice est non inversible

Réponse 16 La matrice M est inversible si et seulement si $1+2a+2b\neq 0$ et $1+2a-2b\neq 0$.

Réponse 18 1. $\det(M-\lambda I_3)=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$.
$\det(M-\lambda I_3)=0$ si et seulement si $\lambda=2$ ou $\lambda=1$.

2. $\text{Ker}(M-I_3)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, x-y+z=0\right\}=\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$
$\text{Ker}(M-2I_3)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, x=y=z\right\}=\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
3. (v_1,v_2,v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base, la matrice de u est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$
4. La matrice de passage $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ convient.

Réponse 19 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$

Réponse 20 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix}$

Réponse 21 On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. $Mat_B(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
2. $Mat_B(s) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
3. Par calcul matriciel, on trouve $p(1,2,3) = (0,2,4)$, $p(1,1,1) = (0,1,2)$ et $s(1,2,3) = (-1,2,5)$, $s(1,1,1) = (-1,1,3)$.

Réponse 22 $M_a^{-1} = M_{-a} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse 23

1. Il suffit de montrer que cette famille est libre.
2. $Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Une base de l'image est (ϵ_1, ϵ_2). ϵ_3 forme une base du noyau.

Réponse 24 $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left((1,1,-1,0),(1,0,-1,1)\right)$. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((1,2,-1),(1,-1,-1)\right)$.

Réponse 25

1. $\mathrm{Ker} f = \mathrm{vect}(1,1,1)$ $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}\left((2,-1,-1),(-1,2,-1)\right)$.
2. il suffit de montrer que ces deux espaces sont en somme directe.
3. On note $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (2,-1,-1)$, et $e_3 = (-1,2,-1)$, la matrice de f dans cette base est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Réponse 26

1. il suffit de montrer que c'est une famille libre . $Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$
$A^n = \begin{pmatrix} -n+1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & n & n+1 \end{pmatrix}$

Réponse 27 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et oui.

Réponse 31

1.
2. On a $P(-a) = \prod_{i=1}^{n}(r_i - a)$ et $P(-b) = \prod_{i=1}^{n}(r_i - b)$ car, dans ces deux cas-là, la matrice est triangulaire.
3. $P(X) = \dfrac{1}{a-b}\left(\prod_{i=1}^{n}(r_i - b) - \prod_{i=1}^{n}(r_i - a)\right)X + \dfrac{1}{a-b}\left(a\prod_{i=1}^{n}(r_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(r_i - a)\right)$. $\Delta_1 = P(0) = \dfrac{1}{a-b}\left(a\prod_{i=1}^{n}(r_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(r_i - a)\right)$.
$\Delta_2 = \dfrac{(-b)^n - (-a)^n}{a-b} = (-1)^n \dfrac{b^n - a^n}{a-b}$.
4. $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(r_i - a) + \sum_{i=1}^{n}\prod_{i\neq j=(}^{r} j - a)(X+a)$

Réponse 32

1. il est nul.
2. On a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(y_j - x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_j - x_i)} \neq 0$.
3. $D_n = \dfrac{\sum_{i<j}(x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j}(x_i + y_j}$