Lycée du Parc
PCSI 842
DM 11

Année 2025-2026

Devoir maison 11.

à rendre le 18 mai pour les trinômes impairs

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on considère $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

1. On considère $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$. Montrer que Φ est un isomorphisme.

2. En déduire la dimension de E.

On souhaite trouver une base de E formée de suites dont le terme général est explicite.

3. On suppose que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E. Pourquoi peut-on supposer que $r \neq 0$?

4. Que doit satisfaire le complexe r?

5. Si r est solution de l'équation dite caractéristique $r^2 - ar - b = 0$, montrer que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E.

6. On suppose $a^2+4b \neq 0$, donner une base de E à l'aide des solution de l'équation caractéristique.

7. On suppose $a^2 + 4b = 0$, on note alors $r_0 \in \mathbb{C}$ tel que $a = 2r_0$ et $b = -r_0^2$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \Leftrightarrow \left(\dfrac{u_n}{r_0^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, avec $F = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n\}$.
   (b) Montrer que pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (c) En déduire un élément non constant de F.
   (d) Donner une base de E dans ce cas-là.

On suppose désormais $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on note $\widetilde{E} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$. L'ensemble $\widetilde{E}$ est alors un sous-$\mathbb{R}$-ev de E.

8. Justifier rapidement que $\widetilde{E}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

9. Donner une base de E dans le cas où l'équation caractéristique admet des racines réelles.

On suppose désormais que l'équation caractéristique admet z_1 et z_2 pour racines complexes conjuguées avec $z_1 = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

10. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{E}$, justifier qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$.
    (b) Montrer que $\mu = \overline{\lambda}$
    (c) En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\rho^n \cos(n\theta) + \beta\rho^n \sin(n\theta)$.
    (d) Justifier que $((\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}, (\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\widetilde{E}$.