

DS d'entraînement 9

Exercice 1.

Soit α, β deux réels strictement positifs. On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. On souhaite notamment étudier la nature de cette série, selon les valeurs de α et β . Pour

tout entier $n \geq 2$, on note $S_n = \sum_{k=3}^n u_k$.

1. Supposons $\alpha > 1$ (et $\beta > 0$ quelconque). Quelle est la nature de $\sum u_n$?
2. Supposons $\alpha < 1$ (et $\beta > 0$ quelconque). Montrer que $\sum u_n$ est divergente.
Indication : écrire α sous la forme $1 - \varepsilon$
3. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$, et $\beta \neq 1$. On pose la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$, et on note, pour $(a, x) \in]1, +\infty[^2$: $I(a, x) = \int_a^x h(t) dt$.
 - (a) Justifier l'existence de $I(a, x)$.
 - (b) A l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$, calculer $I(a, x)$, et déterminer sa limite lorsque $x \rightarrow +\infty$. On distinguera deux cas, selon la valeur de β .
 - (c) Pour $n \geq 3$, établir l'encadrement

$$I(3, n+1) \leq S_n \leq I(2, n)$$

et en déduire les valeurs de β pour lesquelles la série $\sum u_n$ est convergente.

- (d) Montrer que lorsqu'elle est divergente, on a $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta}$.
4. On suppose dans cette question que $\alpha = \beta = 1$, de sorte que $S_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln k}$. L'objectif est de montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ (que l'on ne cherchera pas à calculer), telle que

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(\ln n) + C + o(1)$$

- (a) Montrer que cela revient à prouver que la série de terme général

$$t_n = \frac{1}{n \ln n} - (\ln(\ln n) - \ln(\ln(n-1)))$$

est convergente.

- (b) Montrer que $\ln(n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- (c) En déduire que $t_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$, et conclure.
5. En synthétisant les résultats des questions précédentes, expliquer brièvement pour quelles valeurs de α et β la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 2.

Dans tout le problème, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3.

Pour deux matrices A et B de $M_3(\mathbb{R})$, on dit que la matrice A est semblable à la matrice B lorsqu'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et u un endomorphisme de E . Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, alors $A = P^{-1}BP$ et par suite la matrice A est semblable à la matrice B .

Partie I

Soient A, B, C trois matrices de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est semblable à B alors B est semblable à A .
Désormais, on pourra alors dire que les matrices A et B sont semblables.
2. Montrer que si d'une part A et B sont semblables et que d'autre part B et C le sont aussi alors A et C sont semblables. (la relation 'être semblable' est transitive)
3. Montrer que si A et B sont semblables alors elles ont même rang.

Partie II

Soit u un endomorphisme de E et $v = u^2 - u$.

1. Soient p, q deux entiers naturels et w l'application linéaire de $\ker u^{p+q}$ vers E définie par $w(x) = u^q(x)$.
 - (a) Montrer que $\text{Im}(w) \subset \ker u^p$.
 - (b) En déduire que $\dim \ker u^{p+q} \leq \dim \ker u^p + \dim \ker u^q$.
2. Dans cette question, on suppose que $u^3 = 0$ et $\text{rg} u = 2$.
 - (a) Établir que $\dim \ker u^2 = 2$.
 - (b) Justifier qu'il existe un vecteur a de E tel que $u^2(a) \neq 0$
 - (c) Montrer que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .
 - (d) Écrire la matrice U de u et la matrice V de v dans cette base.
3. Dans cette question, on suppose que $u^2 = 0$ et $\text{rg} u = 1$.
 - (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b de E tel que $u(b) \neq 0$.
 - (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(u(b), c, b)$ est une base de E .
 - (c) Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de v dans cette base.

Partie III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que A est semblable à son inverse A^{-1} . On pose

$$N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = N^2 - N.$$

1. (a) Calculer N^3 et justifier que $\text{rg} N \leq 2$.
(b) Justifier que A est inversible et que $A^{-1} = I_3 + M$
2. Dans cette question, on suppose que $\text{rg} N = 2$.

(a) En exploitant 2, montrer que la matrice N est semblable à la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) En exploitant 2d, dire à quelle matrice "simple" la matrice M est semblable. En déduire M^3 et $\text{rg} M$.

- (c) Montrer que les matrices M et N sont semblables
 - (d) Conclure que A et A^{-1} sont semblables.
3. Dans cette question, on suppose que $\text{rg}N \leq 1$. Montrer que A et A^{-1} sont encore semblables.

Exercice 3.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On note Id l'application identité de E . Pour tout endomorphisme f de E , on note $f^0 = Id$, et pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément a de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(a) = a$.
- La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E .
- La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est alors appelée cycle de E .

Partie I : Exemples

1. Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f : (x, y) \rightarrow (-y, x)$.

- (a) Montrer que f est en endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
 - (b) En considérant $a = (1, 0)$, observer que f est cyclique d'ordre p , l'entier p étant à préciser.
2. Dans cette question $E = \text{vect}(\sin, \cos)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions \sin et \cos .
- (a) Déterminer la dimension de E .
 - (b) Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pour $f \in E$, on note τ_p l'application définie par

$$\tau_p(f) : x \mapsto f\left(x + \frac{2\pi}{p}\right)$$

Montrer que $\tau_p(f) \in E$.

- (c) Montrer que $\tau_p : f \mapsto \tau_p(f)$ est un endomorphisme de E .
- (d) On pose $f = \sin$. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\tau_p^k(f)$. Observer que, pour $k, l \in \mathbb{N}$, on a

$$\tau_p^k(f) = \tau_p^l(f) \Rightarrow l \equiv k[p].$$

- (e) Montrer que τ_p est cyclique d'ordre p .

Partie II : Étude

Dans cette partie, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p . Soit $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ un cycle de f .

1. Montrer que $p \geq n$.
2. (a) Observer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^p(f^k(a)) = f^k(a)$.
(b) En déduire que $f^p = Id$. L'endomorphisme f est-il bijectif?
(c) Par quel argument rapide pourrait-on justifier que les ensembles $\ker(f - Id)$ et $\ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$ sont des sous-espaces vectoriels de E ? Établir qu'ils sont supplémentaires.
3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(a, f(a), \dots, f^{k-1}(a))$ soit libre.
(a) Montrer que $f^m(a)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)$.
(b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à m , le vecteur $f^k(a)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)$.
(c) En déduire que $m = n$ et que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .
4. Soit g un endomorphisme commutant avec f c'est-à-dire tel que $f \circ g = g \circ f$. On note $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ les n nombres réels tels que :

$$g(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$$

On considère h l'endomorphisme de E défini par

$$h = \alpha_0 Id + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

- (a) Montrer que f et h commutent.
- (b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(a)) = h(f^k(a))$.
- (c) En déduire que $g = h$.
- (d) Quels sont les endomorphismes de E commutant avec f ?

Correction du devoir d'entraînement n 9

Correction 1

1. On remarque que $\sum u_n$ est une série à termes positifs. De plus, pour tout $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} \ln(n) \geq 1 & \quad \text{donc} & (\ln n)^\beta \geq 1^\beta = 1 \\ & \quad \text{donc} & n^\alpha (\ln n)^\beta \geq n^\alpha \\ & \quad \text{donc} & \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

Or, comme $\alpha > 1$, $\frac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série convergente. Par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum u_n$ est convergente.

Il est impératif de citer correctement le théorème utilisé

2. Posons $\varepsilon = 1 - \alpha > 0$ de sorte que $\alpha = 1 - \varepsilon$. On a :

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{1-\varepsilon} (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{n^\varepsilon}{(\ln n)^\beta}}_{= v_n}$$

Or, comme $\varepsilon > 0$, on a par croissance comparée : $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Donc en particulier, à partir d'un certain rang, $v_n \geq 1$, et $u_n \geq \frac{1}{n}$.

Or, $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente. Donc par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

C'est la partie du thm que vous n'aimez pas, personne ne l'a montré (correctement).

3. (a) Si $t \in \mathbb{R}$, le nombre $\ln(t)$ est défini si $t > 0$, et $t(\ln t)^\beta$ s'annule ssi $t = 1$. La fonction h est donc continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, par quotient de fonctions continues. En particulier, si $a, x \in]1, +\infty[$, elle est continue sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$). Donc $I(a, x)$ est bien définie.

On sort de DS où j'ai dit qu'il était impératif de préciser que la fonction était continue sur son intervalle j'ai donc été intraitable.

(b) Fixons $a, x \in]1, +\infty[$. En posant le changement de variable $u = \ln(t)$; $du = \frac{dt}{t}$, on a :

$$\begin{aligned} I(a, x) &= \int_{\ln(a)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^\beta} \\ &= \left[\frac{1}{-\beta+1} u^{-\beta+1} \right]_{\ln a}^{\ln x} \quad (\text{on a bien } \beta \neq 1) \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left[(\ln x)^{1-\beta} - (\ln a)^{1-\beta} \right] \quad (\text{forme 1}) \\ &= \frac{1}{\beta-1} \left[\frac{1}{(\ln a)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} \right] \quad (\text{forme 2}) \end{aligned}$$

D'où les deux cas suivants.

- 1^{er} cas : si $\beta < 1$, c'est-à-dire $1 - \beta > 0$.

D'après la forme 1, et comme $(\ln x)^{1-\beta} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, on a $I(a, x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

- 2nd cas : si $\beta > 1$, c'est-à-dire $\beta - 1 > 0$.

D'après la forme 2, et comme $\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a $I(a, x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta-1} \cdot \frac{1}{(\ln a)^{\beta-1}}$.

- (c) On remarque que pour tout $n \geq 3$, $S_n = \sum_{k=3}^n h(k)$.

Fixons $n \geq 3$. La fonction h est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. On a pour tout $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$ les deux raisonnements suivants.

- Pour tout $t \in [k, k+1]$, $h(t) \leq h(k)$. Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_k^{k+1} h(t) dt \leq \int_k^{k+1} h(k) dt = h(k).$$

- Pour tout $t \in [k-1, k]$, $h(k) \leq h(t)$. Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_{k-1}^k h(k) dt \leq \int_{k-1}^k h(t) dt \quad \text{c'est-à-dire} \quad h(k) \leq \int_{k-1}^k h(t) dt.$$

En sommant l'encadrement $\int_k^{k+1} h(t) dt \leq h(k) \leq \int_{k-1}^k h(t) dt$ sur $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$:

$$\sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} h(t) dt \leq S_n \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k h(t) dt$$

puis, par la relation de Chasles :

$$\int_3^{n+1} h(t) dt \leq S_n \leq \int_2^n h(t) dt$$

c'est-à-dire $I(3, n+1) \leq S_n \leq I(2, n)$.

On a donc les deux cas suivants.

- 1^{er} cas : si $\beta < 1$.

On a $I(3, n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ d'après la question précédente. Donc par comparaison, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. $\sum u_n$ est donc divergente.

- 2nd cas : si $\beta > 1$.

La suite $(I(2, n))_{n \geq 3}$ converge, d'après la question précédente, donc est en particulier majorée (mettons pas $M \in \mathbb{R}$). La suite $(S_n)_{n \geq 3}$ est donc croissante (série à termes positifs) et majorée par M . Donc elle converge. Autrement dit, $\sum u_n$ est convergente.

- (d) Plaçons-nous dans le cas où $\beta < 1$, et partons de l'encadrement

$$I(3, n+1) \leq S_n \leq I(2, n).$$

On a :

$$I(3, n+1) = \frac{1}{1-\beta} \left[(\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln 3)^{1-\beta} \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

$$\text{et } I(2, n) = \frac{1}{1-\beta} \left[(\ln n)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta} \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Cela implique que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta}$.

En effet, posons $w_n = \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta}$. On a

$$I(3, n+1) \leq S_n \leq I(2, n) \quad \text{donc} \quad \frac{I(3, n+1)}{w_n} \leq \frac{S_n}{w_n} \leq \frac{I(2, n)}{w_n}.$$

Or, $\frac{I(3, n+1)}{w_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\frac{I(2, n)}{w_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc par théorème des gendarmes, $\frac{S_n}{w_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, c'est-à-dire $S_n \sim w_n$.

4. (a) Si $C \in \mathbb{R}$, la phrase $S_n = \ln(\ln n) + C + o(1)$ équivaut à $S_n - \ln(\ln n) = C + o(1)$, c'est-à-dire $S_n - \ln(\ln n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} C$.

Tout revient donc à montrer que la suite $(S_n - \ln(\ln n))_{n \geq 3}$ converge. Or :

- $S_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln k}$;

- Par télescopage, $\ln(\ln n) = \ln(\ln 2) + \sum_{k=3}^n \ln(\ln k) - \ln(\ln(k-1))$.

Donc $S_n - \ln(\ln n) = \ln(\ln 2) + \sum_{k=3}^n t_k$.

Cela montre en particulier que la convergence de la suite $(S_n - \ln(\ln n))_{n \geq 3}$ est équivalente à celle de la série $\sum t_n$.

(b) On a :

$$\ln(n-1) = \ln\left(n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Or,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^2 \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)}_{= \mathcal{O}(1)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

Donc $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et par suite, $\ln(n-1) = \ln(n) - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(c) On a donc :

$$\begin{aligned} \ln(\ln(n-1)) &= \ln\left[\ln(n) - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \ln\left[\ln(n) \left(1 - \frac{1}{n \ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)\right)\right] \\ &= \ln(\ln n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n \ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)\right) \end{aligned}$$

On écrit alors $\ln(1 + X_n) = X_n + \mathcal{O}(X_n^2)$ pour $X_n = -\frac{1}{n \ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$, ce qui donne :

$$\ln(\ln(n-1)) = \ln(\ln n) - \frac{1}{n \ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$$

car comme $X_n \sim -\frac{1}{n \ln n}$, on a $X_n^2 \sim \frac{1}{n^2 \ln^2 n}$, qui est négligeable devant $\frac{1}{n^2 \ln n}$.

Cette égalité est bien équivalente à $t_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$.

Cela implique $|t_n| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$. Or, $\frac{1}{n^2 \ln n}$ est le terme général d'une série convergente, car $0 \leq \frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2}$. Donc par comparaison asymptotique sur les séries à termes positifs, $\sum |t_n|$ est convergente, ce qui implique que $\sum t_n$ est convergente.

5. La question 4 a montré que lorsque $\alpha = \beta = 1$, $\sum u_n$ diverge, puisque $S_n \sim \ln(\ln n)$, donc $S_n \rightarrow +\infty$. La série $\sum u_n$ converge donc ssi on est dans l'un des deux cas suivants :

- $\alpha > 1$;
- $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Correction 2 Partie I

1. Si A est semblable à B , alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Posons $Q = P^{-1} \in GL_3(\mathbb{R})$, on a alors $B = Q^{-1}AQ$ donc Q est semblable à A .

Si vous écrivez $B = PAP^{-1}$, il vous manque la dernière étape pour montrer que B est semblable à A .

2. Supposons qu'il existe $P, Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$. On a alors $A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP)$ avec $QP \in GL_3(\mathbb{R})$ donc A et C sont semblables.

Attention, on a vu dans le chapitre calcul matriciel que l'inverse de AB et $B^{-1}A^{-1}$, pas besoin de le démontrer (ni de douter!)

3.

On sait que la multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang car cela revient à composer par un automorphisme, on a donc $\text{rg}(B) = \text{rg}(BP) = \text{rg}(P^{-1}BP) = \text{rg}(A)$.

On peut aussi dire que A et B représente le même endomorphisme dans des bases différentes et donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \text{rg}(B)$. **Partie II**

1. (a) Soit $y \in \text{Im}(w)$, alors il existe $x \in \ker u^p$ tel que $y = w(x) = u^q(x)$. On a donc $u^p(y) = u^{p+q}(x) = 0_E$.

(b)

On écrit le théorème du rang pour w :

$$\dim \ker(u^{p+q}) = \dim \ker w + \dim \text{Im} w$$

On sait que $\dim \text{Im} w \leq \dim \ker u^p$ d'après la question précédente. Par ailleurs, $\ker w = \ker u|_{\ker u^{p+q}} = \ker u^{p+q} \cap \ker u^q$, or $\ker u^q \subset \ker u^{p+q}$ donc $\ker w = \ker u^q$. On a donc $\dim \ker u^{p+q} \leq \dim \ker u^q + \dim \ker u^p$.

Attention $\text{Im} w \neq \text{Im} u^q$ et $\text{Ker} w \neq \text{Ker} u^q$!!! On a $\text{Im}(w) = u^q(\text{Ker}(u^{p+q})) \subset \text{Im}(u^q)$ et $\text{Ker}(w) = \ker u^q \cap \text{Ker}(u^{p+q})$.

2. (a) On applique la question précédente à $p = 1 = q$, on a donc $\dim \ker u^2 \leq 2 \dim \ker u$. Or $\text{rg} u = 2$ donc $\dim \ker u = 1$ d'où $\dim \ker u^2 \leq 2$.

Appliquons maintenant la question précédente à $p = 1$ et $q = 2$, on a donc $\dim \ker u^3 \leq \dim \ker u^2 + \dim \ker u$ or $u^3 = 0$ donc $\ker u^3 = E$ et $\dim \ker u^2 = 3$. On a ainsi $\dim \ker u^2 \geq 2$ d'où l'égalité par double inégalité.

- (b) D'après la question précédente, on sait que $\dim \ker u^2 = 2$ donc $\ker u^2 \neq E$. Il existe donc $a \in E$ tel que $u^2(a) \neq 0$. Montrons que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 u^2(a) + \lambda_2 u(a) + \lambda_3 a = 0_E$ (1).

On applique u , on obtient $\lambda_2 u^2(a) + \lambda_3 u(a)$ (2) puisque $u^3 = 0$. En appliquant encore u , on obtient $\lambda_3 u^2(a) = 0_E$ et comme $u^2(a) \neq 0_E$, on a $\lambda_3 = 0$. En reportant dans l'égalité (2), cela implique $\lambda_2 u^2(a) = 0_E$ donc $\lambda_2 = 0$ et enfin, l'égalité (3) donne $\lambda_1 = 0$. On a montré que les trois coefficients sont nuls donc la famille est libre. Comme elle est de cardinal 3 et que $\dim E = 3$, cette famille est une base de E .

- (c) On a $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) D'après le théorème du rang appliqué à u , on sait que $\dim \ker u = 2$ donc $\ker u \neq E$ et il existe par conséquent $b \in E$ tel que $u(b) \neq 0_E$.

- (b) On a vu que $\dim \ker u = 2$, on peut donc compléter la famille libre $(u(b))$ en une base $(u(b), c)$ de $\ker u$.

Montrons que la famille $(u(b), c, b)$ est une famille libre. Soient $\lambda_1 u(b) + \lambda_2 c + \lambda_3 b = 0_E$. Appliquons u à cette égalité, on obtient $\lambda_3 u(b) = 0_E$ puisque $u(b)$ et c appartiennent à $\ker u$. Cela implique $\lambda_3 = 0$ puisque $u(b) \neq 0_E$. On a ainsi $\lambda_1 u(b) + \lambda_2 c = 0_E$ et comme la famille est libre, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la famille est libre. Comme elle est de cardinal 3, c'est une base de E .

(c)

$$\text{On a } U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie III

1. (a) On a $N^3 = 0$. La matrice de N étant triangulaire à coefficients diagonaux nuls, N n'est pas inversible donc $\text{rg} N < 3$ soit $\text{rg} N \leq 2$. On peut aussi dire que $\text{Im}(N)$ est engendré par les colonnes de N et comme N a une colonne nulle, l'espace est engendré par deux colonnes (qui peuvent être nulles donc le rang peut ne pas être égal à 2)

(b)

Il suffit de vérifier que $A(I_3 + M) = (I_3 + N)(I_3 + N^2 - N) = I_3$. Cela implique que A admet un inverse à droite donc qu'elle est inversible et $A^{-1} = I_3 + M$.

De manière générale, un élément est inversible s'il admet un inverse à droite ET à gauche. Les matrices étant un cas très particulier où un seul inverse suffit, montrez que vous le savez en précisant votre raisonnement

2. (a) Fixons une base B de E , alors il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $N = \text{Mat}_B(u)$. Comme $N^3 = 0$ et $\text{rg} N = 2$, on a $u^3 = 0$ et $\text{rg} u = 2$. On peut donc appliquer la question 2 de la partie 2, on sait que pour un tel endomorphisme, il existe une base \mathcal{C} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = U$. Les matrices U et N représentant le même endomorphisme, elles sont semblables.
- (b) On sait d'après la question précédente qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $N = P^{-1}UP$ d'où $M = N^2 - N = P^{-1}U^2P - P^{-1}UP = P^{-1}(U^2 - U)P = P^{-1}VP$ donc M et V sont semblables.

On a $M^3 = P^{-1}V^3P = 0$ puisque $V^3 = 0$ et $\text{rg} M = \text{rg} V = 2$.

(c)

D'après la question précédente, on sait que $M^3 = 0$ et $\text{rg} M = 2$ donc on peut appliquer le même raisonnement qu'à la question 2a) pour montrer que M et U sont semblables. On a donc M et N semblables à U donc ces deux matrices sont semblables.

3. — Si $\text{rg} N = 0$ alors $N = 0$ et $A = I_3 = A^{-1}$ donc A est bien semblable à son inverse.
- Si $\text{rg} N = 1$, alors, pour une base donnée B de E , il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_B(u) = N$. On a alors $u^3 = 0$ et $\text{rg} u = 1$ donc, d'après la question 3 de la partie II, on sait qu'il existe une base \mathcal{C} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = U'$. Les matrices N et U' sont donc semblables.
- Comme à la question précédente, on montre ensuite que M est semblable à V' donc $M^3 = 0$ et $\text{rg} M = 1$. Le même raisonnement que pour N permet de montrer que M est semblable à U' donc à N .

Correction 3

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On note Id l'application identité de E . Pour tout endomorphisme f de E , on note $f^0 = Id$, et pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément a de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(a) = a$.
 - La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E .
 - La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.
- La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est alors appelée cycle de E .

Partie I : Exemples

1. Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f : (x, y) \rightarrow (-y, x)$.

(a) Montrer que f est en endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

Soient U, V deux vecteurs de \mathbb{R}^2 et λ un réel, on a $U = (x, y)$ et $V = (x', y')$ et

$$f(\lambda U + V) = f(\lambda x + x', \lambda y + y') = (-\lambda y - y', \lambda x + x') = \lambda(-y, x) + (-y', x') = \lambda f(U) + f(V)$$

(b) En considérant $a = (1, 0)$, observer que f est cyclique d'ordre p , l'entier p étant à préciser.

On a

$$f(a) = (0, 1), f^2(a) = (-1, 0), f^3(a) = (0, -1) \text{ et } f^4(a) = (1, 0) = a$$

Par ailleurs, $(a, f(a))$ engendre \mathbb{R}^2 donc $(a, f(a), f^2(a), f^3(a))$ aussi et il est clair que les éléments de cette famille sont deux à deux distincts.

L'application f est donc cyclique d'ordre 4.

2. Dans cette question $E = \text{vect}(\sin, \cos)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions sin et cos.

(a) Déterminer la dimension de E .

Montrons que la famille (\cos, \sin) est libre. On suppose qu'il existe α, β deux réels tels que $\alpha \cos + \beta \sin = 0$, soit $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$, on obtient $\alpha = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$. La famille est donc libre et elle engendre par conséquent un espace vectoriel de dimension 2. On a

$$\dim E = 2$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pour $f \in E$, on note τ_p l'application définie par

$$\tau_p(f) : x \mapsto f\left(x + \frac{2\pi}{p}\right)$$

Montrer que $\tau_p(f) \in E$.

Soit $f \in E$ alors il existe deux réels α, β tels que $f = \alpha \cos + \beta \sin$. On a donc, pour tout x réel,

$$\begin{aligned} \tau_p(f)(x) &= \alpha \cos\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) + \beta \sin\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) \\ &= \alpha \cos x \cos \frac{2\pi}{p} - \alpha \sin x \sin \frac{2\pi}{p} + \beta \sin x \cos \frac{2\pi}{p} + \beta \cos x \sin \frac{2\pi}{p} \\ &= \underbrace{\left(\alpha \cos \frac{2\pi}{p} + \beta \sin \frac{2\pi}{p}\right)}_{\in \mathbb{R}} \cos x + \underbrace{\left(\beta \cos \frac{2\pi}{p} - \alpha \sin \frac{2\pi}{p}\right)}_{\in \mathbb{R}} \sin x \end{aligned}$$

On a donc bien $\tau_p(f) \in E$ pour tout $f \in E$.

(c) Montrer que $\tau_p : f \mapsto \tau_p(f)$ est un endomorphisme de E .

On a vu à la question précédente que si $f \in E$, alors $\tau_p(f) \in E$, l'application τ_p est donc définie de E dans lui-même.

Montrons maintenant que l'application est linéaire. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\tau_p(\lambda f + g)(x) = (\lambda f + g)\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) = \lambda f\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) + g\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) = \lambda \tau_p(f)(x) + \tau_p(g)(x)$$

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\tau_p(\lambda f + g) = \lambda \tau_p(f) + \tau_p(g)$, ce qui montre que τ_p est linéaire.

(d) On pose $f = \sin$. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\tau_p^k(f)$. Observer que, pour $k, l \in \mathbb{N}$, on a

$$\tau_p^k(f) = \tau_p^l(f) \Rightarrow l \equiv k[p].$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\tau_p(f)(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{p}\right)$ donc $\tau_p^2(f)(x) = \tau_p(f)\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) = f\left(x + \frac{4\pi}{p}\right)$ puis, par récurrence sur k , on montre que

$$\tau_p^k(f)(x) = \sin\left(x + \frac{2k\pi}{p}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

Supposons maintenant que $\tau_p^k(f) = \tau_p^l(f)$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin\left(x + \frac{2k\pi}{p}\right) = \sin\left(x + \frac{2l\pi}{p}\right)$$

d'où $x + \frac{2k\pi}{p} \equiv x + \frac{2l\pi}{p} [2\pi]$. Il existe donc $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x + \frac{2k\pi}{p} = x + \frac{2l\pi}{p} + 2\pi m$, soit $k = l + mp$. On a donc bien

$$k \equiv l[p]$$

(e) Montrer que τ_p est cyclique d'ordre p .

Montrons que τ_p vérifie les trois conditions :

— On a bien $\tau_p(f) = f$.

— On a $\tau_p(f) = \sin \frac{2\pi}{p} \cos + \cos \frac{2\pi}{p} \sin$ donc $\cos = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{p}} \left(\tau_p(f) - \cos \frac{2\pi}{p} f \right) \in \text{vect}(f, \tau_p(f))$. La famille $(f, \tau_p(f))$ est ainsi génératrice de E et la famille $(f, \tau_p(f), \dots, \tau_p^{p-1}(f))$ l'est donc également.

— Les éléments sont bien distincts d'après la question précédente.

Partie II : Étude

Dans cette partie, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p . Soit $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ un cycle de f .

1. Montrer que $p \geq n$.

Par hypothèse, la famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E et elle possède p éléments, on a donc $p \geq n = \dim E$

2. (a) Observer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^p(f^k(a)) = f^k(a)$.

Il suffit de remarquer que $f^p(f^k(a)) = f^k(f^p(a))$ et $f^p(a) = a$.

(b) En déduire que $f^p = Id$. L'endomorphisme f est-il bijectif?

L'endomorphisme f^p envoie les éléments d'une famille génératrice de E sur eux-mêmes, il vaut donc l'identité sur E . L'endomorphisme f est bijectif puisque $f^{p-1} \circ f = f \circ f^{p-1} = Id$

(c) Par quel argument rapide pourrait-on justifier que $\ker(f - Id)$ et $\ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$ sont des sous-espaces vectoriels de E ? Établir qu'ils sont supplémentaires.

Ce sont des ev car ce sont les noyaux des deux applications linéaires $f - Id$ et $Id + f + \dots + f^{p-1}$.

Montrons qu'ils sont supplémentaires. Montrons tout d'abord que la somme est directe. Soit donc $x \in \ker(f - Id) \cap \ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$, alors $f(x) = x$ et $x + f(x) + \dots + f^{p-1}(x) = 0$; or $f(x) = x$ implique $f^k(x) = x, \forall k$, on a donc $x + f(x) + \dots + f^{p-1}(x) = px = 0$ donc $x = 0$ et l'intersection est réduite à zéro.

Montrons maintenant qu'ils sont supplémentaires. Soit $x \in E$, on cherche à écrire $x = y + z$ avec $y \in \ker(f - Id)$ et $z \in \ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$. Supposons que ce soit le cas, alors $f(x) = y + f(z)$ et par une récurrence immédiate, $f^k(x) = y + f^k(z)$. On a donc

$$x + f(x) + \dots + f^{p-1}(x) = py + z + f(z) + \dots + f^{p-1}(z) = py \text{ puisque } z \in \ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$$

$$\text{donc } y = \frac{1}{p}(x + f(x) + \dots + f^{p-1}(x)).$$

Il est clair qu'un élément de cet forme appartient à $\ker(f - Id)$ puisque $f^p(x) = x$, par conséquent, tout élément x de E peut s'écrire sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \ker(f - Id)$ et $z \in \ker(Id + f + \dots + f^{p-1})$ en posant $y = \frac{1}{p}(x + f(x) + \dots + f^{p-1}(x))$ et $z = x - y$.

$$\boxed{\text{On a bien } E = \ker(f - Id) \oplus \ker(Id + f + \dots + f^{p-1})}$$

3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(a, f(a), \dots, f^{k-1}(a))$ soit libre.

(a) Montrer que $f^m(a)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)$.

Si ce n'était pas le cas, la famille $(a, f(a), \dots, f^{m-1}(a), f^m(a))$ serait libre ce qui contredirait la minimalité de m .

(b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à m , le vecteur $f^k(a)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)$.

Comme suggéré dans l'énoncé, on le montre par récurrence. Le cas initial où $k = m$ a été traité dans la question précédente. On suppose donc que cela est vrai au rang k et nous allons le montrer au rang $k + 1$. Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des réels tels que $f^k(a) = \alpha_1 a + \dots + \alpha_m f^{m-1}(a)$. Appliquons f , on obtient $f^{k+1}(a) = \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_m f^m(a)$ et comme $f^m(a)$ est combinaison linéaire de $a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)$, cela montre que c'est également le cas de $f^{k+1}(a)$.

$$\boxed{f^k(a) \in \text{vect}(a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)), \forall k \geq m}$$

(c) En déduire que $m = n$ et que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .

On sait que la famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E et d'après la question précédente, elle est engendrée par la sous-famille $(a, f(a), \dots, f^{m-1}(a))$ qui est donc une famille génératrice de E . Comme de plus, elle est libre par hypothèse, c'est une base de E ; On a donc $n = m$ et la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .

4. Soit g un endomorphisme commutant avec f c'est-à-dire tel que $f \circ g = g \circ f$. On note $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ les n nombres réels tels que :

$$g(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$$

On considère h l'endomorphisme de E défini par

$$h = \alpha_0 Id + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

(a) Montrer que f et h commutent.

On a $f^k \circ f = f \circ f^k$ pour tout k et par linéarité, on a donc $f \circ h = h \circ f$.

(b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(a)) = h(f^k(a))$.

immédiat.

(c) En déduire que $g = h$.

Les deux endomorphismes sont égaux sur une base de E , ils sont donc égaux.

(d) Quels sont les endomorphismes de E commutant avec f ?

On a montré que si g commute avec f , alors il est combinaison linéaire de Id, f, \dots, f^{n-1} . La réciproque est claire.