Correction du DM n11

1. *On considère* $\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$. *Montrer que* Φ *est un isomorphisme.*
   L'application Φ est linéaire. Soit maintenant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, alors la suite définie par
   $$x_0 = \alpha, x_1 = \beta, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n,$$
   est bien un élément de E qui a pour image (α, β), l'application est bien surjective.

   Par ailleurs, soit $(u_n) \in \mathrm{Ker}\Phi$. Alors $u_0 = u_1 = 0$. Or $u_2 = au_1 + bu_0 = 0$ puis, par récurrence sur n, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. On en déduit que Φ est injective, c'est donc un isomorphisme.

2. *En déduire la dimension de* E.
   L'espace vectoriel E est isomorphe à $\mathbb{C}^2$, il est donc de dimension 2.

Remarque: Inutile d'invoquer le thm du rang pour montrer que les deux ev sont de même dimension. La seule question que vous auriez pu vous poser est : E est-il bien de dimension finie s'il est isomorphe à $\mathbb{C}^2$ qui est de dimension 2? la réponse est oui puisque Φ^{-1} est un isomorphisme, l'image d'une base de $\mathbb{C}^2$ est donc une base de E ce qui montre que E est de dimension 2. *On souhaite trouver une base de* E *formée de suites dont le terme général est explicite.*

3. *On suppose que* $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un élément de* E. *Pourquoi peut-on supposer que* $r \neq 0$*?*
   Si $r = 0$, alors la suite est nulle à partir du rang 1. Pour être un élément de E, il faut donc avoir $b = 0$. Mais dans ce cas, on sait déterminer la forme générale des éléments de E.

4. *Que doit satisfaire le complexe* r*?*
   Si $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E, on a, $\forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ donc, comme $r^n \neq 0$, $r^2 - ar - b = 0$.

5. *Si* r *est solution de l'équation dite caractéristique* $r^2 - ar - b = 0$, *montrer que* $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un élément de* E.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, alors
   $$\forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} = r^n(ar + b) = ar^{n+1} + br^n,$$
   on a donc bien $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

6. *On suppose* $a^2+4b \neq 0$, *donner une base de* E *à l'aide des solution de l'équation caractéristique.*
   On a donc deux racines distinctes de l'équation caractéristique, notons-les z_1 et z_2. D'après la question précédente, on sait que les suites $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de E, montrons qu'ils forment une famille libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\lambda(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 = 0 \end{cases}$. On a donc
   $$\begin{cases} \lambda = -\mu \\ \lambda(z_1 - z_2) = 0 \end{cases}$$
   On a $z_1 \neq z_2$ donc $\lambda = 0$ puis $\mu = 0$ et la famille est bien libre. La famille $((z_1)_{n\in\mathbb{N}}, (z_2)_{n\in\mathbb{N}})$ est donc libre et comme elle est de cardinal 2, c'est une base de E.

   On peut aussi dire que la famille (de suites) est libre car les deux suites ne sont pas colinéaires étant donné que $r_1 \neq r_2$. Un petit mot pour dire que ce sont bien des éléments de E d'après la question précédente avant de montrer que c'est une base est bienvenu. Attention à ne pas m'écrire le symbole racine carrée alors que nous sommes ici avec des coefficients complexes !

7. *On suppose $a^2+4b=0$, on note alors $r_0 \in \mathbb{C}$ tel que $a=2r_0$ et $b=-r_0^2$.*

   (a) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \Leftrightarrow \left(\dfrac{u_n}{r_0^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, avec*
   $F=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n\}$.
   Alors

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2}=2r_0u_{n+1}+r_0^2u_n\\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+2}}{r_0^{n+2}}=\frac{2r_0u_{n+1}}{r_0^{n+2}}+\frac{r_0^2u_n}{r_0^{n+2}}\\ &\text{car } r_0 \neq 0\\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+2}}{r_0^{n+2}}=2\frac{u_{n+1}}{r_0^{n+1}}+\frac{u_n}{r_0^n}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{r_0^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in F\end{aligned}$$

   On a bien montré l'équivalence.

   (b) *Montrer que pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$ donc $x_{n+2}-x_{n+1}=x_{n+1}-x_n$, on a donc bien $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante.
   Inutile d'invoquer une récurrence, une suite (v_n) qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, v_n=v_{n+1}$ est une suite constante.

   (c) *En déduire un élément non constant de F.*
   On considère la suite $x_0=0$ et $x_1=1$ de F. On a alors $x_{n+1}-x_n=1$ donc la suite est arithmétique de raison 1, on a donc $x_n=n$ pour tout n.
   On vous demande UN élément non constant, pas la forme générale des éléments de F.

   (d) *Donner une base de E dans ce cas-là.*
   La question précédente nous donne la suite $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ (puisque $(n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$) et on savait déjà que $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ était un élément de E. On a donc deux éléments de E. On vérifie avec les premiers termes qu'ils forment une famille libre, de cardinal 2, c'est donc une base de E.

   Il faut essayer de suivre ce que l'énoncé vous demande. Ici, on n'attend pas que vous démontriez que la famille $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est génératrice de E en utilisant la forme générale des éléments de F. On vous demande UN élément non constant de F et d'<u>en déduire</u>, une base de E.

On suppose désormais $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et on note $\widetilde{E}=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\}$. L'ensemble $\widetilde{E}$ est alors un sous-$\mathbb{R}$-ev de E.

8. *Justifier rapidement que $\widetilde{E}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.*
   On peut, par exemple, dire que l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc}\widetilde{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0,u_1)\end{array}\right.$ est un isomorphisme donc $\widetilde{E}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

9. *Donner une base de E dans le cas où l'équation caractéristique admet des racines réelles.*

On suppose tout d'abord que l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes. On note r_1 et r_2 les racines réelles de l'équation caractéristique. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{E}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=\lambda(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$ donc $\overline{\lambda}(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\overline{\mu}(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}=\lambda(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $(\overline{\lambda}-\lambda)(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+(\overline{\mu}-\mu)(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}=(0)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $r_2 \neq r_1$, les deux suites $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ forment une famille libre. On obtient $\mu=\overline{\mu}$ et $\overline{\lambda}=\lambda$. On a donc montré qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=\lambda(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, la famille étant libre, cette combinaison linéaire est unique donc $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\widetilde{E}$ (ou bien c'est une famille génératrice de $\widetilde{E}$ et de cardinal 2 donc une base).

Si l'équation caractéristique admet une unique racine réelle r_0, alors on sait qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=\lambda(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant réelle, on obtient $\overline{\lambda}(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}+\overline{\mu}(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}=\lambda(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $(\overline{\lambda}-\lambda)(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}+(\overline{\mu}-\mu)(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}=(0)_{n\in\mathbb{N}}$ et par liberté de la famille $((r_0^n)_{n\in\mathbb{N}},(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$, on obtient $\lambda=\overline{\lambda}$ et $\mu=\overline{\mu}$ donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On conclut de la même façon que précédemment.

Certains ont dit que l'on peut refaire un raisonnement analogue à celui fait précédemment pour le $\mathbb{C}$-ev E mais il faut être sûr de soit et certains que tout se transpose parfaitement à notre $\mathbb{R}$-ev. . On suppose désormais que l'équation caractéristique admet z_1 et z_2 pour racines complexes conjuguées avec $z_1=\rho e^{i\theta},\rho>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

10. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\widetilde{E}$

   (a) *Justifier qu'il existe* $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ *tel que* $\forall n\in\mathbb{N},u_n=\lambda z_1^n+\mu z_2^n$.
   Cela découle du fait que $\widetilde{E}\subset E$.

   (b) *Montrer que* $\mu=\overline{\lambda}$
   On sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, on a donc $\overline{(u_n)}_{n\in\mathbb{N}}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire

$$\overline{\lambda}(\overline{z_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}+\overline{\mu}(\overline{z_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}=\lambda(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

   Or, $\overline{z_1}=z_2$, on a donc

$$\overline{\mu}(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\overline{\lambda}(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}=\lambda(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

   La famille $((z_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ étant libre, on peut identifier les coefficients, on a donc $\overline{\lambda}=\mu$.
   Beaucoup m'ont dit "par identification" ce qui est beaucoup trop vague ! De même "par unicité de l'écriture" ne veut pas dire grand chose si on ne sait pas de quoi vous parlez.

   (c) *En déduire qu'il existe* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $\forall n\in\mathbb{N},u_n=\alpha\rho^n\cos(n\theta)+\beta\rho^n\sin(n\theta)$.

   On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\lambda\rho^n e^{in\theta}+\overline{\lambda}\rho^n e^{-in\theta}=\rho^n 2\mathcal{R}e\left(\lambda e^{in\theta}\right).$$

   On pose $\lambda=\alpha'+i\beta'$, on a alors $\mathcal{R}e\left(\lambda e^{in\theta}\right)=\alpha'\cos(n\theta)-\beta'\sin(n\theta)$. Donc, en posant $\alpha=\dfrac{\alpha'}{2}$ et $\beta=-\dfrac{\beta'}{2}$, on a bien $\forall n\in\mathbb{N},u_n=\alpha\rho^n\cos(n\theta)+\beta\rho^n\sin(n\theta)$.

   (d) *Justifier que* $((\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}},(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$ *est une base de* $\widetilde{E}$.
   D'après la question précédente, on sait que $\widetilde{E}\subset\mathrm{Vect}\left((\rho^n\cos(n\theta)_{n\in\mathbb{N}},(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Les deux suites étant non colinéaires, $\widetilde{E}$ est inclus dans un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, il lui est donc égal et $((\rho^n\cos(n\theta))$ est une famille génératrice de $\widetilde{E}$. Elle est de cardinal 2 donc c'est une base de $\widetilde{E}$.

Attention : on a montré à la question précédente que tout élément de $\widetilde{E}$ était une CL de ces deux suites mais il faut justifier que ces deux suites appartiennent bien à $\widetilde{E}$ pour affirmer que c'est une famille génératrice (ou passer par un argument de dimension comme j'ai fait pour éviter de le montrer :-)