Réponses du TD n22

Réponse 1 $P(Y=6)=\dfrac{1}{4}$, $P(Y=2)=P(Y=4)=\dfrac{3}{8}$

Réponse 2 $\mathbb{E}(Z)=2$

Réponse 3 $P(X=0)=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\right]$ et $P(Y=3)=\dfrac{1}{4}$

Réponse 4 $P(X=0)=1-p$ et $P(X=1)=p$, $\mathbb{E}(X_n)=\dfrac{p}{1-p}(1-p^n)$

Réponse 5 $\beta=\dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{2^n(n+1)}{2^{n+1}-1}-1$.

Réponse 6 $P(Y=k)=P(X=n-k)=\binom{n}{n-k}p^{n-k}(1-p)^k=\binom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k}$, et Y suit une loi binomiale de paramètres n et $1-p$.

Réponse 7 Pour tout $k<n$, on a $P(Y=k)=\binom{n}{k-1}$ et $P(Y=n)=\binom{n}{n-1}p^{n-1}(1-p)+\binom{n}{n}p^n=p^{n-1}(n(1-p)+p)$. oui.

Réponse 8 $\dfrac{1}{p(n+1)}$.

Réponse 9 1. $X\sim\mathscr{B}\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$
2. $X\sim\mathscr{B}\left(20,\dfrac{1}{3}\right)$
3. $X\sim\mathscr{U}(\llbracket 0,2\rrbracket)$. 4. $X\sim\mathscr{U}(\llbracket 1,78\rrbracket)$.

Réponse 10 1. X_1 et X_2 suivent des lois binomiale de paramètres n et $1/3$.
2. $\mathbb{V}(X_1)=\dfrac{2n}{9}=\mathbb{V}(X_2)$ et $\mathbb{V}(X_1+X_2)=\dfrac{2n}{9}$. 3. $2cov(X_1,X_2)=\dfrac{2n}{9}\neq 0$, les variables ne sont pas indépendantes.

Réponse 12 1.

X_2 \ X_1	0	1
0	$\dfrac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$	$\dfrac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$
1	$\dfrac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$

et

- $P(X_1=1)=\dfrac{a}{a+b}$, $P(X_1=0)=\dfrac{b}{a+b}$
- $P(X_2=1)=\dfrac{b}{a+b}$, $P(X_2=0)=\dfrac{a}{a+b}$.

3. $\mathbb{E}(X_1X_2)=P((X_1=1)\cap(X_2=1))=\dfrac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$ et $\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)=\dfrac{ab}{(a+b)^2}$. 4. $\mathbb{E}(X)=1$ et $\mathbb{V}(X)=\dfrac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$

Réponse 14 au moins 2667 personnes.

Réponse 16
1. pour tout $k\in\llbracket 1,6\rrbracket$, $P(X=k)=\dfrac{k}{21}$.
2. $\mathbb{E}(X)\dfrac{13}{3}$.
3. $\mathbb{E}(Y)=\dfrac{2}{7}$.

Réponse 17
1. $X\hookrightarrow B(\dfrac{1}{2},3)$.
2. X suit donc une loi uniforme.
   Si on rajoute 15 moutons, on a $P(X=0)=\dfrac{1}{2}$ et $P(X=1)=P(X=2)=\dfrac{1}{4}$.
3. $X\hookrightarrow B(\dfrac{1}{3},20)$.
4. On a $X(\Omega)=\llbracket 1,78\rrbracket$ et X suit une loi uniforme

Réponse 18
1. $\mathbb{E}(Z)=1$.
2. $\ln(\mathbb{E}(X))=\ln\left(\dfrac{1+3e+5e^2}{5}\right)$.

Réponse 19 1. non 2. oui

Réponse 20
1. $P(Z=2)=\dfrac{16}{25}$, $P(Z=1)=1-P(Z=0)-P(Z=2)=\dfrac{8}{25}$.
2. $P(Y=0)=0.136$ $P(Y=1)=0.48$ $P(Y=2)=0.384$.
3. la marge brute moyenne est égale à 374.4

Réponse 21
1. $\alpha=\dfrac{1}{55}$.
2. On a $\mathbb{E}(X)=\dfrac{21}{3}$. $\mathbb{V}(X)=48$.
3. On a $Y(\Omega)=\llbracket 2,11\rrbracket$ et pour tout $k\in\llbracket 2,11\rrbracket$, $P(Y=k)=\dfrac{k-1}{55}$.
   On a $\mathbb{E}(Y)=49$.
   On a $Z(\Omega)=\{0,1,4,9,16,25\}$ et
   - $P(Z=0)=P(X=5)=\dfrac{1}{11}$.
   - $P(Z=1)=P(X=6)+P(X=4)=\dfrac{2}{11}$.

— $P(Z=4) = P(X=7) + P(X=3) = \frac{2}{11}$.

— $P(Z=9) = P(X=8) + P(X=2) = \frac{2}{11}$.

— $P(Z=16) = P(X=9) + P(X=1) = \frac{2}{11}$.

— $P(Z=25) = P(X=10) = \frac{2}{11}$

On a $\mathbb{E}(Z) = 10$

On a $T(\Omega) = \{2p, p \in [\![1,10]\!]\}$. Pour tout $k \in [\![1,10]\!]$, on a $P(T=2k) = \frac{k}{55}$. On a $\mathbb{E}(T) = 96$.

Réponse 22 Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$
et $P(X=n+1) = (1-p)^n$.

Réponse 23

1. $\alpha = \frac{1}{n(2n+1)}$.
2. $\frac{(n+1)}{3}$.

Réponse 24 X suit une loi de binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{3}$.

Réponse 25

1. oui
2. la loi n'est pas uniforme.
3. oui
4. non

Réponse 26 $P(X=1) = 0.4$, $P(X=0) = 0.6$ et $P(X>1) = 0$

Réponse 27

1. $X(\Omega) = [\![0,2500]\!]$
2. $P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2500}$
3. $P(X=2500) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2500}$
4. $\forall\ k \in [\![0,2500]\!]$, $P(X=k) = \binom{2500}{k}\frac{2^{2500-k}}{3^{2500}}$

Réponse 28

1. On $X(\Omega) = \{0,1\} = Y(\Omega)$. On a

y \ x	0	1
0	$\frac{24}{32}$	$\frac{4}{32}$
1	$\frac{4}{32}$	0

et

z \ x	0	1
0	$\frac{21}{32}$	$\frac{3}{32}$
1	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{32}$

2. X et Y ne sont pas indépendantes mais X et Z oui.

Réponse 29

1. X et Y suivent donc des lois binomiales de paramètres n et $\frac{1}{6}$, leurs espérances valent $\frac{n}{6}$ et leurs variances $\frac{5n}{36}$.
2. $P_{Y=j}(X=k) = \binom{n-j}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{4}{6}\right)^{n-j-k}$
3. Les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes
4. On a $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$, Soit $i \in [\![0,n]\!]$, alors

$$\begin{aligned} P(Z=i) &= \sum_{j=0}^{i} P\big((Y=j)\cap(X=i-j)\big) \\ &= \sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^j\binom{n-j}{i-j}\left(\frac{1}{6}\right)^{i-j}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-i} \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^n\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\left(\frac{1}{4}\right)^i \end{aligned}$$

Réponse 30

1. X suit une loi binomiale de paramètres 100 et $\frac{5}{100}$ et Y suit une loi binomiale de paramètres 400 et $\frac{10}{100}$
2. On a $\mathbb{E}(Z) = 45$ et $\mathbb{V}(Z) = 40.75$
3. $c = 74$.

Réponse 31

1. $a = \frac{1}{10}$
2. $P(X \leqslant 0) = \frac{4}{10}$
   $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = \frac{5}{10}$
3. $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{5}$
   $\mathbb{V}(X) = \frac{76}{25}$.
4. $\mathbb{E}(Y) = \frac{8}{5}$ et $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X)$

5.

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$3a$	$2a$	$3a$	$2a$

6.

(T,X)	-2	-1	0	1	2	3
0	$\frac{4}{3}a$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a$	$2a$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{4}{3}a$
1	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	a	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$

$\mathbb{E}(TX) = \dfrac{1}{5}$.

Réponse 32 1. $X(\Omega) = [\![1, b+1]\!]$. $P(X=1) = \dfrac{n}{n+b}$ $P(X=2) = \dfrac{b}{n+b} \times \dfrac{n}{n+b}$. pour $k \leqslant b$, $P(X=k) = \dfrac{b!n!}{(b+n)!}\binom{b+n-k-1}{b-k}$ $P(X=b+1) = \dfrac{b!n!}{(b+n)!}$

2. $Y(\Omega) = [\![2, b+2]\!]$. $P(Y=2) = \dfrac{n!(n+b-2)!}{(n-2)!(n+b)!}$ $P(Y=3) = \dfrac{2n(n-1)b}{(n+b)(n+b-1)(n+b-2)}$. $P(Y=k) = \dfrac{n!b!}{(b+n)!}\binom{n+b-k}{n-2}$.

Réponse 33 $X(\Omega) = [\![2, n]\!]$ et $P(X=k) = \dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!} = \dfrac{k-1}{k!}$.

Réponse 34 1. $P(X=i) = \dfrac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.

2. (a)

   (b)

   (c) $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n \times (2n+1)}{n+1}$.

3. $\mathbb{V}(X) = \dfrac{2n(2n+1)(n+1)^3 - (2n+1)(n+1) - (2n+1)^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}$

Réponse 35 1. $\mathbb{E}(X_k) = \dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{V}(X_k) = \dfrac{n-1}{n^2}$

2. $\mathbb{E}(X_k X_l) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n-1}$
3. Soit $(k,l) \in [\![1, n]\!] X_l)$

   Donc X_k et X_l ne sont pas indépendantes
4. $\mathbb{E}(S) = 1 = \mathbb{V}(S)$