Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
Feuille 22

TD 22 : Variables aléatoires.

1 Manipulation

Exercice 1.
Soit Y une variable aléatoire prenant les valeurs $2,4,6$ et 8. On a $\mathbb{P}(Y<6)=\dfrac{1}{4}$, $\mathbb{P}(Y>6)=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y=4)=\mathbb{P}(Y=2)$. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

Exercice 2.
On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par : $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=4)=\mathbb{P}(X=9)=1/3$. On pose Z=$\sqrt{X}$, calculer l'espérance de Z.

Exercice 3.
On dispose de deux urnes U et V.
L'urne U contient 3 boules noires et 2 boules blanches, et l'urne V 4 boules noires et 1 boule blanche.

1. On choisit une urne au hasard et on en extrait successivement trois boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée.
   On note X la var égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $\mathbb{P}(X=0)$.
2. On choisit une urne au hasard et on en extrait successivement 3 boules, sans remise de la boule tirée.
   On note Y la var égale au nombre de boules noires tirées. Calculer $\mathbb{P}(Y=3)$.

Exercice 4.
Un mobile se déplace par sauts aléatoirement sur les points à coordonnées entières et positives ou nulles d'un axe d'origine O. Le voyage se déroule ainsi :
• Le mobile est en O à l'instant 0
• Si le mobile est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors : à l'instant $n+1$, il sera :
$$\begin{cases} \text{soit sur le point d'abscisse } k+1 \text{ avec la probabilité } p\in]0,1[\\ \text{soit en O avec la probabilité } 1-p \end{cases}$$
On appelle X_n la v.a.r. égale à l'abscisse du mobile à l'instant n : $X_0=0$.

1. Donner la loi de X_1.
2. Montrer que : $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$.
3. (a) Prouver que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall\, k\in[\![1,n]\!],\ \ \mathbb{P}(X_n=k)=p\,\mathbb{P}(X_{n-1}=k-1)$
   (b) En déduire que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{E}(X_n)=p\,\mathbb{E}(X_{n-1})+p$
   (c) Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de p et de n.

Exercice 5.
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\beta\in\mathbb{R}$, et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que $\forall\, k\in[\![0,n]\!], \mathbb{P}(X=k)=\beta\dfrac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

1. Déterminer β.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2 Lois usuelles

Exercice 6.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n,p. Donner (puis reconnaître) la loi de $Y=n-X$.

Exercice 7.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n,p. Les résultats de X sont censés être affichés sur un compteur mais celui-ci est détraqué :

— Lorsque X prend la valeur n, le compteur affiche la bonne valeur de X.
— Lorsque X prend la valeur k, avec $k<n$, le compteur affiche $k+1$.

On note Y la variable aléatoire égale à la valeur affichée sur le compteur.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y)\geqslant\mathbb{E}(X)$.
3. Aurait-on pu prévoir ce résultat?

Exercice 8.
Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre $p\in]0,1[$. Calculer l'espérance de la variable $Y=\dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 9.

Donner la loi de X dans chacun des cas suivants. Préciser l'univers image et les paramètres.

1. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de filles dans une famille de 3 enfants.
2. Dans un champ, on trouve 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de ce champ. X est le nombre de bosses de cet animal.
3. On range 20 cravates dans 3 tiroirs, au hasard. X est le nombre de cravates dans le premier tiroir.
4. Un jeu de tarot (78 cartes) est mélangé et posé faces cachées. On retourne une par une les cartes jusqu'à trouver l'Excuse. X est le nombre de cartes retournées au total.

3 Couples de variables aléatoires

Exercice 10.
À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

Exercice 11.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois $\mathscr{B}(m,p)$ et $\mathscr{B}(n,p)$ respectivement. Montrer que $X+Y$ suit la loi $\mathscr{B}(m+n,p)$.
2. En déduire l'identité de Vandermonde : pour tout $k \in [\![0, n+m]\!]$:
$$\binom{n+m}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r}.$$

Exercice 12.
On pioche deux boules successivement et sans remise dans une urne contenant a boules noires et b boules blanches. On note X_1 la variable indicatrice de l'événement "la première boule est noire" et X_2 la variable indicatrice de l'événement "la seconde boule est noire".

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2), ainsi que ses lois marginales.
2. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X_1X_2)$ et $\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.
4. Soit $X = X_1 + X_2$. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 13.
Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante. Montrer que
$$\forall a \geqslant 0, \qquad \mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(g(|X|))}{g(a)}.$$

Exercice 14.
Lors d'élections, on sait qu'un parti politique recueille en général un pourcentage p des voix compris entre 20 et 30. Combien de personnes suffit-il d'interroger à la sortie du bureau de vote pour estimer p avec une précision de 3%, et une probabilité d'erreur inférieure à 10%?

Exercice 15.
Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ. Montrer que pour tout réel α strictement positif.
$$\mathbb{P}(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

4 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 16.
On considère un dé cubique truqué à six faces, de sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k.
Soit X la var associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. On pose Y = 1/X. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

Exercice 17.
Donner la loi de X dans chacun des cas suivants.
1. On suppose que les probabilités de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. On note X le nombre de filles dans une famille de 3 enfants.
2. Dans un champ, on trouve 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de ce champ. On note X le nombre de bosses de cet animal. Même question en ajoutant 15 moutons.
3. On range 20 cravates dans 3 tiroirs, au hasard. On note X le nombre de cravates dans le premier tiroir.
4. Un jeu de tarot (78 cartes) est mélangé et posé faces cachées. On retourne une par une les cartes jusqu'à trouver l'Excuse. On note X le nombre de cartes retournées au total.

Exercice 18.
On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(X=e) = \frac{3}{5}$, $\mathbb{P}(X=e^2) = \frac{1}{5}$.
1. On pose $Z = \ln(X)$, calculer l'espérance de Z grâce au théorème de transfert.
2. Montrer que $\frac{1+3e+e^2}{5} \neq e$ et en déduire que $\mathbb{E}(\ln(X)) \neq \ln(\mathbb{E}(X))$

Exercice 19.
On lance deux dés cubiques équilibrés, les faces étant marquées de 1 à 6.

1. On gagne 1 euro si la somme des points obtenus est supérieure strictement à 7 et on perd 1 euro sinon. Le jeu est-il équitable?
2. On considère maintenant la règle suivante : on gagne 1 euro si les points obtenus sur les deux dés diffèrent de 1 ou 2 et on perd sinon. Le jeu est-il équitable?

Exercice 20.
Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5.
Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture.
On considère X la var égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture.

On suppose que $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ avec :
$\mathbb{P}(X=0)=0.1,\ \mathbb{P}(X=1)=0.3,\ \mathbb{P}(X=2)=0.4$ et $\mathbb{P}(X=3)=0.2$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Z sont indépendantes.
2. Soit Y la var : '*nombre de clients satisfaits par jour*'. Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 21.
Soit $\alpha > 0$ et X une var à valeurs dans $[\![1,10]\!]$. On suppose que pour tout $k \in [\![1,10]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)=\alpha k$.

1. Déterminer la valeur de α.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer les lois et calculer les espérances de $Y = X+1$, $Z=(X-5)^2$ et $T=2Z$.

Exercice 22.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On lancer n fois une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est $p \in]0,1[$. On désigne par X la variable aléatoire égale au numéro du lancer au cours duquel apparaît "pile" pour la première fois ou égale à $n+1$ si pile n'apparaît pas au cours des n lancers.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{p}$.

Exercice 23.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et X une var telle que $\forall k \in [\![1,2n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)=\alpha k$.

1. Déterminer α.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \in \mathscr{P})$ ou $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des entiers pairs de $[\![1,2n]\!]$.

Exercice 24.
Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules vertes et 7 boules rouges. On tire trois boules dans l'urne avec remise et on note X la variable égale au nombre de boules blanches tirées. Donner sans calcul la loi de X.

Exercice 25.
Parmi les situations suivantes qu'elles sont celles que l'on peut décrire par une variable aléatoire discrète de loi uniforme.

1. Le lancer d'un dé non truqué.
2. Le nombre de six obtenus en trois lancers successifs d'un dé.
3. Le jour (jour + mois) d'anniversaire de naissance d'une personne.
4. Le jour du mois où est née une personne.

Exercice 26.
Soit X une variable aléatoire suivante une loi $\mathscr{B}(0.4)$.
Calculer $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X=1)$ et $\mathbb{P}(X>1)$

Exercice 27.

Le comité des fêtes d'une école d'ingénieurs organise le Gala annuel de l'école. La soirée est prévue dans un château.
À l'arrivée, chacun des 2500 participants devra déposer ses affaires dans l'un des trois vestiaires, appelés $V1$, $V2$ et $V3$.
Chaque participant choisit son vestiaire de manière aléatoire, indépendamment du choix des autres participants.
On considère la variable aléatoire X, où X désigne le nombre de participants choisissant le vestiaire $V1$.

1. Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?
2. Déterminer la probabilité qu'aucun participant ne choisisse le vestiaire $V1$.
3. Déterminer la probabilité que tous les participants choisissent le vestiaire $V1$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 28.
On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On note X la variable aléatoire indicatrice de l'événement "on tire un roi", Y la variable aléatoire indicatrice de l'événement "on tire une dame ", et Z la variable aléatoire indicatrice de l'événement "on tire un cœur".

1. Déterminer les lois conjointes et marginales des couples (X,Y) et (X,Z).
2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 29.
On jette n dés, et on note X et Y les nombres de 1 et de 6 obtenus respectivement.

1. Déterminer les lois suivies par X et Y, leurs espérances et leurs variances.
2. Déterminer, pour tout $j \in Y(\Omega)$, la loi de X sachant $Y=j$.
3. En déduire la loi conjointe du couple (X,Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $Z = X+Y$.

Exercice 30.
Une usine A et une usine B fabriquent des pièces de moteur. En moyenne 5% des pièces fabriquées dans l'usine A et 10% des pièces fabriquées par dans l'usine B sont défectueuses. Pour un contrôle, on prélève aléatoirement 100 pièces de A et 400 pièces de B, et on considère X et Y les variables aléatoires donnant le nombre de pièces prélevées défectueuses respectivement de A et de B.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Soit $Z = X + Y$. Déterminer l'espérance et la variance de Z.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer c tel que le risque que le nombre de pièces défectueuses prélevées soit supérieur à c est inférieur à 5%.

Exercice 31.
On donne dans le tableau suivant la loi d'une variable aléatoire X :

k	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$2a$	a	a	$3a$	a	$2a$

1. Justifier que $a = \dfrac{1}{10}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$ et $\mathbb{P}(|X| \leqslant 1)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Soit $Y = X + 1$. Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
5. Déterminer la loi de la variable $Z = |X - 1|$.
6. Soit T une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$ telle que X et T soient indépendantes.
   Déterminer la loi conjointe du couple (T, X) et calculer $\mathbb{E}(TX)$.

5 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 32.
Une urne contient b billes blanches et n billes noires. On tire toute les billes les unes après les autres sans remise.

1. On note X la var représentant le rang d'apparition de la première bille noire. Calculer la loi de X
2. On note Y la var représentant le rang d'apparition de la deuxième bille noire. Calculer la loi de Y

Exercice 33.
Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules une à une et sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage au cours duquel le numéro tiré est strictement supérieur à un numéro tiré précédemment, ou égale à n si aucun des tirages ne vérifie cela. Préciser l'ensemble des valeurs de X, déterminer $\mathbb{P}(X > k)$ et en déduire la loi de X.

Exercice 34.
Dans une urne contenant n boules blanches et n boules rouges, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X le nombre de tirages juste nécessaire à l'obtention de toutes les boules rouges (c'est-à-dire le rang de la dernière boule rouge tirée).

1. Déterminer la loi de X (on précisera l'univers utilisé).
2. (a) Lemme : $p \leqslant m$, en écrivant $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, démontrer la formule dite "de Pascal généralisée" : $\displaystyle\sum_{k=p}^{m} \binom{k}{p} = \binom{m+1}{p+1}$.
   (b) Que vaut $\displaystyle\sum_{k=p}^{m} \binom{k}{k-p}$?
   (c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Calculer $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 35.

Soit $n \geqslant 1$. Au départ d'une course de chevaux, n jockeys se présentent avec des dossards numérotés de 1 à n. Les chevaux se répartissent au hasard dans les emplacements de la grille de départ, numérotés de 1 à n.

On définit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si le cheval numéro k est dans l'emplacement numéro k, et 0 sinon ; et S la variable aléatoire égale au nombre de chevaux placés dans l'emplacement correspondant à leur numéro de dossard.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la loi de X_k, son espérance et sa variance.
2. Calculer, pour tout $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $k \neq l$, $\mathbb{E}(X_k X_l)$.
3. X_k et X_l sont-elles indépendantes pour $k \neq l$?
4. En admettant que $\mathbb{V}(S) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \mathbb{E}(X_k X_l) - \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l)$, calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

Exercice 36.
Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. En introduisant la variable aléatoire $Y = (\alpha(X - \mu) + \sigma)^2$, montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant \mu + \alpha\sigma) \leqslant \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

6 Problèmes

Exercice 37.

Soit N un entier supérieur ou égal à 3. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.

1. On tire deux boules successivement avec remise. On note X la v.a.d. égale au plus grand numéro obtenu et Y la v.a.d. égale au plus petit numéro obtenu.
   (a) Préciser l'univers Ω , $X(\Omega)$. Déterminer la loi de X.
   (b) calculer $\mathbb{E}(X)$.
   (c) Mêmes questions pour Y.
2. On tire de l'urne initiale deux boules simultanément. Reprendre les trois questions précédentes.
3. On tire de l'urne initiale une poignée de m boules, m étant un entier non nul et inférieur ou égal à N. Pour tout entier $k \in [\![1, N]\!]$, on note X_k la v.a.d. qui prend la valeur k si la boule numéro k est dans la poignée et qui prend la valeur 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de chacune des variables aléatoires X_k et leurs espérances.
   (b) Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros de la poignée tirée. Déterminer l'espérance de S

Exercice 38.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0;1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On s'intéresse aux successions de lancers amenant un même côté. Pour décrire la succession de n lancers, on introduit la notion de séries de lancers amenant un même côté et on parle de longueur d'une série. Ainsi :

— la première série est de longueur $m \in [\![1, n-1]\!]$ si les m premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(m+1)$-ième l'autre côté;
— elle est de longueur n si les n lancers ont amené le même côté de la pièce.

Si la longueur de la première série est égale à $m < n$:

— la deuxième série commence au $(m+1)$-ième lancer et se termine au lancer précédant un changement de côté s'il y a au moins un deuxième changement de côté au cours des n lancers;
— sinon on dit qu'elle est de longueur $n - m$.

On peut définir de même les séries suivantes. Ω_n désigne l'ensemble des successions de pile ou face au bout de n lancers.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le i-ième lancer amène pile ", F_i l'événement contraire.

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note L_1 la variable aléatoire égale à la longueur de la première série.
   (a) Déterminer $L_1(\Omega_n)$.
   (b) On suppose que $m < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, m+1]\!]$. En déduire $\mathbb{P}(L_1 = m)$.
   (c) On suppose maintenant que $m = n$. Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, n]\!]$. En déduire $\mathbb{P}(L_1 = n)$.
   (d) Vérifier : $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(L_1 = m) = 1$.
2. On note L_2 la longueur de la deuxième série, s'il y en a une, et on pose $L_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série.
   (a) Déterminer $L_2(\Omega_n)$.
   (b) On suppose que $m + k < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m + k + 1$. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.
   (c) On suppose que $m + k = n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n.
   En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.

Exercice 39.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.

Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.

On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.
2. Donner les lois de T_1 et de T_2.

Pour la suite, on prendra $n \geqslant 2$.

4. Déterminer les probabilités $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = 2)$.
5. Calculer $P(T_n = n)$.
   On pourra distinguer les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.
6. Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$ on a :
$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1).$$
7. On considère dans cette question la fonction :
$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)\, x^k.$$
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :
$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + x\, G_n(x).$$

(b) En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n) + 1.$$

(c) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

(d) Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la $i$ème case est pleine, 0 sinon.

Correction du TD n 22

Correction 1 On a $\mathbb{P}(Y=6)=1-\mathbb{P}(Y>6)-\mathbb{P}(Y<6)=\frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(Y=2)+\mathbb{P}(Y=4)+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$ donc $\mathbb{P}(Y=2)=\mathbb{P}(Y=4)=\frac{1}{8}$.

Correction 2 On a

$$\mathbb{E}(Z)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1=2$$

Correction 3

1. Quelle que soit l'urne tirée, il y a au moins une boule noire et les tirages sont effectués avec remise : X prend ses valeurs dans $\{0,1,2,3\}$.
   On utilise le système complet d'évènements : U : ' ***on tire dans l'urne*** U ' et V : ' ***on tire dans l'urne*** V '.
   Ainsi : $\mathbb{P}(X=0)=P_U(X=0)\,\mathbb{P}(U)+P_V(X=0)\,\mathbb{P}(V)=\frac{1}{2}\,(P_U(X=0)+P_V(X=0))$
   Facilement, $P_U(X=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^2$ (il y a remise) et $P_V(X=0)=\left(\frac{1}{5}\right)^2$.
   Ainsi, $\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]$.
2. La méthode est la même, ce qui change étant le calcul des probabilités $P_U(Y=3)$ et $P_V(Y=3)$:
   $P_U(Y=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$ et $P_V(Y=3)=\frac{2}{5}$, ce qui donne $\mathbb{P}(Y=3)=\frac{1}{4}$.

Correction 4

1. X_1 désigne la position du mobile à l'instant $t=1$, soit sa position après un seul déplacement.
   D'après la règle de déplacement du mobile, X_1 prend ses valeurs dans $\{0,1\}$.
   De plus, $\mathbb{P}(X=0)=1-p$ et $\mathbb{P}(X=1)=p$.
2. On raisonne par récurrence sur l'entier naturel non nul n. Notons $\mathscr{P}_n$: $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$. • On a prouvé à la question précédente que $\mathscr{P}_1$ était vraie. • Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie et on montre qu'alors $\mathscr{P})n+1$ est vraie. Prouvons que X_{n+1} prend toutes les valeurs de $[\![0,n+1]\!]$. - Soit $k\in[\![1,n+1]\!]$: si à l'instant n le mobile est sur le point d'abscisse $k-1\in[\![0,n]\!]$ et qu'il avance, alors il sera sur le point d'abscisse k. - Sinon, il se retrouve en O et donc, X_{n+1} prend aussi la valeur 0. Conclusion : $X_{n+1}(\Omega)=[\![0,n+1]\!]$ et par suite :
   $$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$$
3. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![1,n]\!]$. D'après la question précédente, la famille $\left[(X_{n-1}=j)\right]_{j\in[\![0,n-1]\!]}$ est un système complet d'évènements. Ainsi, $\mathbb{P}(X_n=k)=\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}_{(X_{n-1}=j)}(X_n=k)\mathbb{P}(X_{n-1}=j)$ (formule des probabilités totales) Toujours d'après la règle de déplacement du mobile, $\mathbb{P}_{(X_{n-1}=j)}(X_n=k)=0$ si $j\neq k-1$ et $\mathbb{P}_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n=k)=p$ On en déduit que : $\mathbb{P}(X_n=k)=p\mathbb{P}(X_{n-1}=k-1)$.

   (b) On a :
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n)&=\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(X_n=k)\\&=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X_n=k)\\&=p\sum_{k=1}^{n}pk\mathbb{P}(X_{n-1}=k-1)\text{ d'après la question précédente}\\&=p\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\mathbb{P}(X_{n-1}=j)\text{ en posant }j=k-1\\&=p\sum_{j=0}^{n-1}j\mathbb{P}(X_{n-1}=j)+p\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}(X_{n-1}=j)\\&=p\mathbb{E}(X_{n-1})+p.\end{aligned}$$
   soit encore : $\mathbb{E}(X_n)=p\,[\mathbb{E}(X_{n-1})+1]=p\mathbb{E}(X_{n-1})+p$.

   (c) Si l'on note, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\mathbb{E}(X_n)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_n-\gamma$ et on cherche le réel γ tel que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Soit $n\in\mathbb{N}$:
   $$\begin{aligned}v_{n+1}&=u_{n+1}-\gamma\\&=pu_n+p-\gamma\\&=p(v_n+\gamma)+p-\gamma\\&=pv_n+p\gamma+p-\gamma\\&=pv_n+\gamma(p-1)+p\end{aligned}$$

On a donc $v_{n+1}=pv_n \Leftrightarrow \gamma(p-1)+p=0 \Leftrightarrow \gamma=\dfrac{p}{1-p}$.

On en déduit que $\left(u_n-\dfrac{p}{1-p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison p. On calcule son premier terme : $u_1-\dfrac{p}{1-p}=\mathbb{E}(X_1)-\dfrac{p}{1-p}=p-\dfrac{p}{1-p}=\dfrac{-p^2}{1-p}$ donc,

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n-\frac{p}{1-p}=-\frac{p^{n+1}}{1-p}$$

On en déduit que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X_n)=\frac{p}{1-p}(1-p^n)$$

Correction 5

1. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta}{k+1}\binom{n}{k}=\beta\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Cette somme doit valoir 1. On calcule $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$. Pour cela, on considère, par exemple la fonction $f: x\mapsto(1+x)^n$. On l'intègre entre 0 et x, on obtient, d'une part :

$$\int_0^x(1+t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1},$$

et, d'autre part :

$$\int_0^x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

(en 0, la somme est nulle). On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}.$$

On peut aussi donner deux primitives de f puis calculer la constante d'intégration en prenant, par exemple, $x=0$.

Pour $x=1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

On en déduit que :

$$\beta=\frac{n+1}{2^{n+1}-1}.$$

2. On a, par définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(X=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta k}{k+1}\binom{n}{k}\\&=\beta\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\binom{n}{k}\\&=\beta\left(2^n-\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\right)\\&=\frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}-1}-1.\end{aligned}$$

Correction 6

On a $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ donc $Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$. De plus, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $(Y=k)=(n-X=k)=(X=n-k)$ donc

$$\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=n-k)=\binom{n}{n-k}p^{n-k}(1-p)^k=\binom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k},$$

par symétrie du coefficient binomial. On en déduit que Y suit une loi binomiale de paramètres n et $1-p$.

Correction 7

1. On a $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$. Pour tout $k<n$, on a $\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=k-1)=\binom{n}{k-1}$ et $\mathbb{P}(Y=n)=\mathbb{P}(X=n-1)+\mathbb{P}(X=n)=\binom{n}{n-1}p^{n-1}(1-p)+\binom{n}{n}p^n=p^{n-1}(n(1-p)+p)$.
2. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y)&=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(Y=k)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}k\mathbb{P}(Y=k)+n\mathbb{P}(Y=n)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}k\mathbb{P}(X=k-1)+n\mathbb{P}(X=n-1)+n\mathbb{P}(X=n)\\&=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X=k-1)+n\mathbb{P}(X=n)\\&=\sum_{k=0}^{n}(i+1)\mathbb{P}(X=i)+n\mathbb{P}(X=n)\\&=\mathbb{E}(X)+\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=i)+n\mathbb{P}(X=n)\\&\geqslant\mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

On a bien $\mathbb{E}(Y)\geqslant\mathbb{E}(X)$.

3. On a $Y \geqslant X$ donc par croissance de l'espérance, on aurait pu prévoir ce résultat.

Correction 8 D'après le théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{k+1}.$$

On écrit $(1-p)^{n-k} = \dfrac{(1-p)^n}{(1-p)^k}$ pour obtenir :

$$\mathbb{E}(Y) = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k.$$

Pour calculer cette somme, il faut se souvenir qu'on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

On intègre les deux expressions, il existe donc $K \in \mathbb{R}$ (constante d'intégration) tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + K = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Pour $x = 0$, la somme est nulle, on a donc $K = -\dfrac{1}{n+1}$, ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Ce n'est pas tout à fait la somme que l'on cherche à calculer (on a une puissance k et non pas $k+1$) donc on divise les deux membres par x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{x} . \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}.$$

Appliquons cette égalité à $x = \dfrac{p}{1-p}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = \frac{1-p}{p} . \frac{\left(\frac{1}{1-p}\right)^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{1-p}{p} . \frac{\left(1-(1-p)^{n+1}\right)}{(n+1)(1-p)^{n+1}} = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{n+1)(1-p)^n},$$

puis

$$\mathbb{E}(Y) = (1-p)^n \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)(1-p)^n} = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.$$

L'espérance de Y est donc $\dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$.

Correction 9

1. X peut prendre comme valeurs des entiers entre 0 et 3, donc $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.
   Chaque naissance est une expérience de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   X est égal au nombre de " succès " au cours de la répétition d'expériences de Bernoulli de même paramètre, que l'on peut supposer mutuellement indépendantes : donc X suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$ de paramètres $(n, p) = \left(3, \dfrac{1}{2}\right)$.
2. X peut prendre des valeurs entières entre 0 et 2, 0 pour un lama, 1 pour un dromadaire et 2 pour un chameau :$X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$
   Chaque animal, étant choisi au hasard, est équiprobable.
   Par exemple, la probabilité que X soit égal à 0 est la probabilité qu'un lama soit sorti du champ : par équiprobabilité, elle est égale au nombre de lamas divisé par le nombre total d'animaux : $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$.
   Comme il y autant d'animaux de chaque type, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{1}{3}$.
   Donc X suit une loi uniforme sur $[\![0, 2]\!]$.
3. Le nombre de cravates dans le premier tiroir peut varier entre 0 et 20 : donc$X(\Omega) = [\![0, 20]\!]$.
   Chaque cravate possède la même probabilité de se retrouver dans le premier tiroir, égale à $\dfrac{1}{3}$ par équiprobabilité. Il s'agit ici d'une expérience de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{3}$.
   On répète $n = 20$ fois ces expériences de Bernoulli, de même paramètre, mutuellement indépendantes, et X est égal au nombre de succès.
   Donc X suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(20, \dfrac{1}{3}\right)$ de paramètres $(n, p) = \left(20, \dfrac{1}{3}\right)$
4. On peut retourner de 1 à 78 cartes avant de trouver l'Excuse.
   Donc $X(\Omega) = [\![1, 78]\!]$.
   Notons A_k l'évènement : " on trouve l'Excuse à la k-ieme tentative ". On trouve l'excuse à la k-ieme tentative si et seulement on ne l'a pas trouvée aux $(k-1)$ tentatives précédentes, et on l'a trouvée au k-ieme essai.
   Donc $A_k = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.
   D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1}) \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(\overline{A_3}) \ldots \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) \end{aligned}$$

Or :

— $\overline{A_1}$ est réalisé lorsque l'on a choisit une 'mauvaise' carte, au nombre de 77 dans un total de 78 cartes. Chaque carte étant équiprobable, on a : $\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \dfrac{77}{78}$.

— Pour $j \in [\![2, k-1]\!]$, si $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{j-1}}$ est réalisé, on a déjà essayé $j-1$ cartes, qui n'était pas l'excuse ; $\overline{A_j}$ est réalisé lorsque l'on choisit une mauvaise carte, au nombre de $78-(j-1)-1 = 78-j$ dans un total de $78-(j-1)$ cartes. Chaque carte étant équiprobable, on a : $\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j}) = \dfrac{78-j}{78-j+1}$.

— Enfin, si $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}$ est réalisé, on a déjà essayé $k-1$ cartes, qui n'étaient pas l'excuse ; A_k est réalisé lorsque l'on choisit l'excuse parmi un total de $78-(k-1)$ cartes. Chaque carte étant équiprobable, on a : $\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k) = \dfrac{1}{78-k+1}$.

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) &= \frac{77}{78}\left(\prod_{j=2}^{k-1}\frac{78-j}{78-j+1}\right)\frac{1}{78-k+1}\\ &= \frac{77}{78}\times\frac{76}{77}\times\frac{75}{76}\times\ldots\times\frac{78-k+2}{78-k+3}\times\frac{78-k+1}{78-k+2}\times\frac{1}{78-k+1}.\end{aligned}$$

On reconnaît un produit télescopique, on obtient $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{1}{78}$.

Ainsi, X suit une loi uniforme sur $[\![1, 78]\!]$

Correction 10

1. X_1 et X_2 suivent des lois binomiale de paramètres n et $1/3$.

2. D'après le cours, on sait que $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{2n}{9} = \mathbb{V}(X_2)$. Par ailleurs, on sait que $X_1 + X_2 + X_3 = n$ donc $X_1 + X_2 = n - X_3$, on a donc
$$\mathbb{V}(X_1+X_2) = \mathbb{V}(n-X_3) = \mathbb{V}(X_3) = \frac{2n}{9}$$

3. On sait que $\mathbb{V}(X_1+X_2) = \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2)+2cov(X_1,X_2)$ donc $2cov(X_1,X_2) = -\dfrac{2n}{9} \neq 0$, on en déduit que les variables ne sont pas indépendantes.

Correction 11

1. Posons $Z = X+Y$. On a $X(\Omega) = [\![0, m]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $Z(\Omega) = [\![0, n+m]\!]$. Par ailleurs Z compte les succès dans la répétition de $n+m$ épreuves de Bernoulli, avec une probabilité de p, Z suit donc une loi binomiale de paramètres $n+m$ et p.

2. Soit $k \in [\![0, n+m]\!]$, on suppose que X et Y vérifient les hypothèses de la question précédente pour un certain paramètre $p \in]0,1[$, alors
$$P((X+Y)=k) = \binom{n+m}{k}p^k(1-p)^k,$$
d'après la question précédente. Or l'événement $(X+Y=k)$ est la réunion des événements incompatibles $(X=i)\cap(Y=k-i)$, pour i variant de 0 à k. On a donc
$$\begin{aligned}P((X+Y=k)) &= \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}\left((X=i)\cap(Y=k-i)\right)\\ &= \sum_{i=0}^{k}\end{aligned}$$
$P(X=i)$
$P(Y=k-i)$ car X et Y sont indépendantes
$$\begin{aligned}&= \sum_{i=0}^{k}\tbinom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\tbinom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i} \text{ car } X \sim\\ &= \sum_{i=0}^{k}\tbinom{n}{i}\tbinom{m}{k-i}p^k(1-p)^{n+m-k}\end{aligned}$$
On en déduit que, en identifiant les deux expressions et en divisant par $p^k(1-p)^{n+m-k} \neq 0$, que
$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

Correction 12

1.

X_2 \ X_1	0	1
0	$\dfrac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$	$\dfrac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$
1	$\dfrac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$

et

— $\mathbb{P}(X_1=1) = \dfrac{a}{a+b}$, $\mathbb{P}(X_1=0) = \dfrac{b}{a+b}$

— $\mathbb{P}(X_2=1) = \dfrac{a}{a+b}$, $\mathbb{P}(X_2=0) = \dfrac{b}{a+b}$.

2. Les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=0) \neq \mathbb{P}\left((X_1=0)\cap(X_2=0)\right)$.

3. On a $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{P}\left((X_1=1)\cap(X_2=1)\right) = \dfrac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$ et $\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{a^2}{(a+b)^2}$.

4. Soit $X = X_1 + X_2$. On a $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ et
   — $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}((X_1=0)\cap(X_2=0)) = \dfrac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$
   — $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}((X_1=1)\cap(X_2=1)) = \dfrac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$ et
   — $\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$.

   D'après la question précédente, $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2) = \dfrac{a}{a+b} - \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2 = \dfrac{ab}{(a+b)^2}$ et

   $$\mathrm{Cov}\,(X_1,X_2) = \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = -\frac{ab}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

   On a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{2a}{a+b}$ par linéarité de l'espérance et

   $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + 2cov(X_1,X_2) = \frac{2ab}{(a+b)} - 2\frac{ab}{(a+b)^2(a+b-1)} = \frac{2ab(a+b-2)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Correction 13 On applique l'inégalité de Markov à la var positive $g(|X|)$:

$$\mathbb{P}(g(|X|) \geqslant g(a)) \leqslant \frac{\mathbb{E}(g(|X|)}{g(a)}.$$

Or, g est strictement croissante donc $g(|X|) \geqslant g(a) \Leftrightarrow |X| \geqslant a$. On a donc bien l'inégalité souhaitée.

Correction 14 On note X_n le nb de voix pour le parti parmi les n personnes interrogées. Le pourcentage de personnes interrogées ayant voté pour le parti est donc de $\dfrac{100X_n}{n}$. On souhaite que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{100X_n}{n} - p\right| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{1}{10}.$$

On sait que X_n suit une loi binomiale de paramètre $\dfrac{p}{100}$ et n, on a donc $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{np}{100}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{np}{100}(1-\dfrac{p}{100})$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on a

$$\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{a^2}.$$

Or

$$\left|\frac{100X_n}{n} - p\right| \geqslant 3 \Leftrightarrow \left|X_n - \frac{np}{100}\right| \geqslant \frac{3n}{100},$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{100X_n}{n} - p\right| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{(3n/100)^2}.$$

On a

$$\frac{\mathbb{V}(X_n)}{(3/100)^2} = \frac{\frac{np}{100}\times\frac{100-p}{100}}{\left(\frac{3n}{100}\right)^2} = \frac{p(100-p)}{9n} \leqslant \frac{30\times 80}{9n},$$

d'après l'encadrement donné de p entre 20 et 30. On aura donc une probabilité d'erreur inférieure à 10% si $\dfrac{800}{3n} \leqslant \dfrac{1}{10}$ soit pour $n \geqslant \dfrac{8000}{3}$. Il faut donc interroger au moins 2667 personnes.

Correction 15 On écrit

$$\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma \Leftrightarrow -\alpha\sigma < X - \mu < \alpha\sigma \Leftrightarrow |X-\mu| < \alpha\sigma.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \alpha\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{(\sigma\alpha)^2},$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(|X-\mu| < \alpha\sigma) = 1 - \mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \alpha\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Correction 16

1. X prend ses valeurs dans $[\![1,6]\!]$.
   Par hypothèse, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X=k) = ka$.
   Puisque P_X est une loi de probabilité, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X=k) = 1$ ce qui impose $a = \dfrac{1}{21}$.
   On a donc, pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{k}{21}$.
2. On calcule l'espérance :
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{21} = \frac{6\times 7\times 13}{21\times 6} = \frac{13}{3}.$$
3. On applique le théorème de transfert :
   $$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{21} = \frac{2}{7}.$$

Correction 17

1. On considère qu'obtenir une fille est un succès (!), on compte donc le nb de succès parmi les 3 répétitions. X suit donc une loi binomiale de paramètres $\frac{1}{2}$ et 3.
2. On sait que X prend comme valeur $0,1$ ou 2. On a $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{3}$, X suit donc une loi uniforme.

   Si on rajoute 15 moutons, on a alors $\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{4}$.
3. $X(\Omega)=[\![0,20]\!]$. Si on considère que mettre une cravate dans le premier tiroir est un succès, il a lieu avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. On répète 20 fois cette expérience de Bernoulli, on obtient donc une loi binomiale de paramètres $\frac{1}{3}$ et 20.
4. On a $X(\Omega)=[\![1,78]\!]$. Pour chaque $i\in[\![1,20]\!]$, $X=i$ correspond à " l'excuse est en $i$ème position ce qui arrive avec une probabilité de $\frac{1}{78}$. On peut le retrouver avec les probas conditionnelles. Si on note E_i l'évènement "tirer l'excuse au i-ème tirage", alors

$$\mathbb{P}(X=i)=\mathbb{P}\left(\overline{E}_1\cap\overline{E}_2\cap\ldots\cap\overline{E}_{i-1}\cap E_i\right)$$

   donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i)\quad &=\mathbb{P}(\overline{E}_1)\mathbb{P}_{\overline{E}_1}(\overline{E}_2)\ldots\mathbb{P}_{\overline{E}_1\cap\overline{E}_2\cap\ldots\cap\overline{E}_{i-1}}(E_i)\\ &=\frac{77}{78}\times\frac{76}{78}\times\ldots\frac{78-(i-1)}{78-(i-2)}\frac{1}{78-(i-1)}=\frac{1}{78}\end{aligned}$$

Correction 18

1. On a

$$\mathbb{E}(Z)=\frac{1\ln(1)}{5}+\frac{3\ln(e)}{5}+\frac{\ln(e^2)}{5}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1.$$

2. On raisonne par équivalence :

$$\frac{1+3e+5e^2}{5}=e\Leftrightarrow e^2-2e+1=0\Leftrightarrow(e-1)^2=0.$$

   la dernière égalité est fausse donc, par équivalence, la première aussi. On a donc

$$\frac{1+3e+5e^2}{5}\neq e.$$

   On a $\mathbb{E}(X)=\frac{1+3e+5e^2}{5}$ donc $\ln(\mathbb{E}(X))=\ln\left(\frac{1+3e+5e^2}{5}\right)$. Par ailleurs, on a $\mathbb{E}(\ln(X))=1$ d'après la première question. Comme on a $\frac{1+3e+5e^2}{5}\neq e$, on a $\ln\left(\frac{1+3e+5e^2}{5}\neq e\right)\neq 1$ donc $\mathbb{E}(\ln(X))\neq\ln(\mathbb{E}(X))$.

Correction 19

1. Ici, il n'est pas précisé que les dés sont distinguables (ou que le lancer s'effectue de manière successives). Si on considère que c'est, malgré tout, le cas, on a alors $\Omega=[\![1,6]\!]^2$. On note X la variable aléatoire égale au gain réalisé.

   Le nombre de cas possibles est donc 36. Pour déterminer la probabilité pour que "X=1", on compte les cas favorables c'est-à-dire le nombre de paires donc la somme des coordonnées est strictement supérieure à 7 c'est-à-dire vaut $8,9,10,11$ ou 12.
   - Pour 8, on a 5 cas :$(2,6),(6,2),(3,5),(5,3)$ et $(4,4)$.
   - Pour 9 on a 4 cas :$(3,6),(6,3),(4,5)$ et $(5,4)$.
   - Pour 10 on a 3 cas :$(4,6),(6,4)$ et $(5,5)$.
   - Pour 11 on a 2 cas :$(5,6)$ et $(6,5)$
   - Pour 12 on a 1 cas : $(6,6)$

   Ainsi, le nombre de cas favorables est 15, on a donc $\mathbb{P}(X=1)=\frac{15}{36}$ et $\mathbb{P}(X=-1)=\frac{19}{36}$.
   L'espérance vaut

$$\mathbb{E}(X)=-\frac{19}{36}+\frac{15}{36}=-\frac{1}{9},$$

   le jeu n'est pas équitable.
2. Le nombre de cas possibles est toujours 36. On note encore X la variable aléatoire égale au gain réalisé.On compte le nombre de cas favorables pour avoir $X=1$ c'est-à-dire les paires $(n,n+1)$ ou $(n,n+2)$ (et leurs symétriques!). Pour $(n,n+1)$, n peut varier de 1 à 5, il y a donc 5 telles paires (et 5 paires de la forme $(n+1,n)$. Pour les paires $(n,n+2)$, n varie de 1 à 4 il y a donc 8 paires en tout avec 2 d'écart.

   Ainsi, le nombre de cas favorables est 18. On a donc $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2}$ et le jeu est équitable.

Correction 20

1. Z prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$. On a : $\mathbb{P}(Z=2)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$ (les deux voitures sont disponibles) puis $\mathbb{P}(Z=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$ (aucune voiture n'est disponible). On en déduit $\mathbb{P}(Z=1)=1-\mathbb{P}(Z=0)-\mathbb{P}(Z=2)=\frac{8}{25}$.
2. On a encore Y qui prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$. On calcule la loi de Y en utilisant le formule des probabilités totales : L'évènement $Y=0$ se produit si $X=0$ ou bien si $X\geqslant 1$ et $Z=0$ qui sont deux évènements incompatibles. D'où : $\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}((X\geqslant 1)\cap(Z=0))=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X\geqslant 1)\mathbb{P}(Z=0)=0.1+0.9\left(\frac{1}{5}\right)^2=0.136$

De même, l'évènement$Y = 1$ se produit si ($X = 1$ et $Z \geqslant 1$) ou ($X \geqslant 2$ et $Z = 1$), ce qui donne : $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z \geqslant 1) + \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Z = 1) = 0.48$ Enfin, l'évènement$Y = 2$ est réalisé si $X \geqslant 2$ et $Z = 2$, ce qui donne : $\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(X \geqslant 2)\mathbb{P}(Z = 2) = 0.6 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0.384$.

3. La marge brute vaut $300\,Y$ et donc, la marge brute moyenne est égale à $\mathbb{E}(300\,Y) = 300\mathbb{E}(Y) = 374.4$

Correction 21

1. On sait que $\sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}(X = k) = 1$, on en déduit que $\alpha \sum_{k=1}^{10} k = 1$ donc $\alpha = \frac{1}{55}$.
2. On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{10} k\mathbb{P}(X = k) = \alpha \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{21}{3}$.

   On calcule maintenant $\mathbb{E}(X^2)$ pour déterminer sa variance. On a

$$\mathbb{E}(X^2) = \alpha \sum_{k=1}^{10} k^2.k = 55$$

   (pour rappel, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$).

   Ainsi,

$$\mathbb{V}(X) = 55 - \frac{21}{3} = 48.$$

3. On a $Y(\Omega) = [\![2, 11]\!]$ et pour tout $k \in [\![2, 11]\!]$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k - 1) = \frac{k-1}{55}$.

   On a

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) + 1 = 49.$$

   On a $Z(\Omega) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ et
   - $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{11}$.
   - $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{11}$.
   - $\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(X = 7) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{11}$.
   - $\mathbb{P}(Z = 9) = \mathbb{P}(X = 8) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{11}$.
   - $\mathbb{P}(Z = 16) = \mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{11}$.
   - $\mathbb{P}(Z = 25) = \mathbb{P}(X = 10) = \frac{2}{11}$

   On a donc

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{2}{11}(1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 10$$

   On a $T(\Omega) = \{2p, p \in [\![1, 10]\!]\}$. Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, on a $\mathbb{P}(T = 2k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{55}$.

   On a $\mathbb{E}(T) = 2\mathbb{E}(X) = 96$.

Correction 22

1. On sait que X prend les valeurs entre 1 et $n+1$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(X = k)$ est réalisé lorsque l'on obtient $k-1$ faces au cours des $k-1$ premiers lancers puis un pile. On a donc

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

   On a $(X = n+1)$ si on a obtenu n fois "face", on a donc $\mathbb{P}(X = n+1) = (1-p)^n$.
2. D'après la question précédente, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} p + (n+1)(1-p)^n.$$

   On écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} p + (n+1)(1-p)^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (1-p)^{k-1} p + (n+1)(1-p)^n \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} (1-p)^{k-1} p + (n+1)(1-p)^n \\
&= \sum_{j=1}^{n} p(1-p)^{j-1} \frac{1-(1-p)^{n-j+1}}{p} + (n+1)(1-p)^n \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} (1-p)^{j-1}\right) - n(1-p)^n + (n+1)(1-p)^n \\
&= \frac{1-(1-p)^n}{p} + (1-p)^n \\
&= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}
\end{aligned}$$

   On a bien le résultat souhaité.

Correction 23

1. On a $\sum_{k=1}^{2n} \mathbb{P}(X=k)=1$ donc $\alpha \sum_{k=1}^{2n} k=1$. On en déduit que $\alpha=\frac{1}{n(2n+1)}$.
2. On cherche à calculer $\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} \mathbb{P}(X=k)$. On a

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} \mathbb{P}(X=k)=\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X=2j)=\sum_{j=1}^{n} \frac{2j}{n(2n+1)}=\frac{(n+1)}{3}.$$

Correction 24 On a schéma de Bernoulli de paramètres $=\frac{5}{5+3+7}=\frac{1}{3}$ donc X suit une loi de binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{3}$.

Correction 25

1. oui, chaque issue arrive avec une probabilité de $\frac{1}{6}$.
2. La variable aléatoire prend comme valeur $0,1,2$ ou 3. Calculons les différentes probabilités. On modélise les trois lancers par la donnée d'un triplet ordonné de $[\![1,6]\!]$, il y a donc 6^3 cas possibles. $(X=0)$ correspond aux triplets à valeurs dans $[\![1,5]\!]$ donc $\mathbb{P}(X=0)=\frac{5^3}{6^3}$. On a $4\times\mathbb{P}(X=0)\neq 1$ donc la loi n'est pas uniforme.
3. On peut considérer que chaque date arrive avec la même probabilité donc la variable aléatoire suit une loi uniforme.
4. Dans le cas où on ne considère que le jour, la variable aléatoire prend ses valeurs entre 1 et 31 mais elle n'aura pas la même probabilité selon le mois de naissance.

Correction 26 La variable aléatoire sur une loi de Bernoulli de paramètre 0.4, on a donc $\mathbb{P}(X=1)=0.4$ et $\mathbb{P}(X=0)=0.6$. Comme X ne prend comme valeur que 0 ou 1, on a $\mathbb{P}(X>1)=0$.

Correction 27

1. Étant donné que le Gala accueille 2500 participants, le nombre de participants choisissant le vestiaire $V1$ peut varier entre 0 et 2500. Donc $X(\Omega)=[\![0,2500]\!]$
2. On cherche la probabilité de l'événement $(X=0)$.
Pour tout $k\in[\![1,2500]\!]$, on définit la variable aléatoire Y_k égale à : $\begin{cases} 1 \text{ si le } k\text{-ieme participant choisit le vestiaire } V1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
Alors $(X=0)=\bigcap_{k=1}^{2500}(Y_k=0)$.
Or, par hypothèse, les choix de chaque participant est indépendant du choix des autres participants. Les événements $(Y_k=0)$ sont alors mutuellement indépendants. Donc :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=0) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{2500}(Y_k=0)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{2500}\mathbb{P}(Y_k=0) \text{ par indépendance mutuelle} \end{aligned}$$
Or chaque participant choisit son vestiaire de manière aléatoire : chaque vestiaire est donc équiprobable. Ainsi : $\mathbb{P}(Y_k=0)=\frac{\text{Card}(\{V2,V3\})}{\text{Card}(\{V1,V2,V3\})}=\frac{2}{3}$. D'où :
$$\mathbb{P}(X=0)=\prod_{k=1}^{2500}\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2500}$$
3. De même, on cherche la probabilité de l'événement $(X=2500)$:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=2500) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{2500}(Y_k=1)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{2500}\mathbb{P}(Y_k=1) \text{ par indépendance mutuelle} \end{aligned}$$
Or comme $Y_k(\Omega)=\{0,1\}$, $\mathbb{P}(Y_k=1)=1-\mathbb{P}(Y_k=0)=\frac{1}{3}$. D'où :
$$\mathbb{P}(X=2500)=\prod_{k=1}^{2500}\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2500}$$
4. D'après les questions précédentes, pour tout $k\in[\![1,2500]\!]$, Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{3}$. Par hypothèse, les variables aléatoires $(Y_k)_{k\in[\![1,2500]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.
Et $X=\sum_{k=1}^{2500} Y_k$: X est la somme de $n=2500$ variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli, de même paramètre $p=\frac{1}{3}$, mutuellement indépendantes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=2500$ et $p=\frac{1}{3}$:

$$\forall\ k \in [\![0,2500]\!]\ ,\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{2500}{k} \frac{2^{2500-k}}{3^{2500}}$$

Correction 28

1. On $X(\Omega) = \{0,1\} = Y(\Omega)$. On a

y \ x	0	1
0	$\frac{24}{32}$	$\frac{4}{32}$
1	$\frac{4}{32}$	0

et

z \ x	0	1
0	$\frac{21}{32}$	$\frac{3}{32}$
1	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{32}$

2. On a $\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) \neq 0$ donc X et Y ne sont pas indépendantes. En revanche, en calculant les 4 produits pour X et Z, on constate qu'elles sont indépendantes.

Correction 29

1. Cela revient à répéter un schéma de Bernoulli n fois de manière indépendante. En supposant les dés équilibrés, X et Y suivent donc des lois binomiales de paramètres n et $\frac{1}{6}$, leurs espérances valent $\frac{n}{6}$ et leurs variances $\frac{5n}{36}$.
2. Soit $j \in Y(\Omega)$ et $k \in [\![0,n]\!]$. Si $k > n-j$, alors $\mathbb{P}_{Y=j}(X=k) = 0$. Si $k \leqslant n-j$, on suppose que j dés sont tombés sur 6, il reste donc $n-j$ dés qui doivent prendre k fois la valeur 1 et $n-j-k$ fois une valeur entre 2 et 5. La probabilité d'un tel évènement est
$$\mathbb{P}_{Y=j}(X=k) = \binom{n-j}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{n-j-k}$$
3. Soit $(j,k) \in [\![0,n]\!]^2$, alors
$$\mathbb{P}\big((X=k)\cap(Y=j)\big) = \mathbb{P}(Y=j)\mathbb{P}_{Y=j}(X=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j+k>n \\ \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^j\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{4}{6}\right)^{n-j-k} & \text{sinon} \end{cases}$$
Les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes car les probabilités de $X = k$ ou $Y = j$ ne sont jamais nulles.
4. On a $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$ car le nb total de 1 et de 6 ne peut excéder le nb total de dés. Soit $i \in [\![0,n]\!]$, alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=i) &= \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}\big((Y=j)\cap(X=i-j)\big)\\ &= \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^j \binom{n-j}{i-j}\left(\frac{1}{6}\right)^{i-j}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-i}\\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^n \sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\left(\frac{1}{4}\right)^i\end{aligned}$$

Correction 30

1. X suit une loi binomiale de paramètres 100 et $\frac{5}{100}$ et Y suit une loi binomiale de paramètres 400 et $\frac{10}{100}$
2. Soit $Z = X+Y$. On a $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y) = 45$ par linéarité de l'espérance et $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y) = 40.75$ car on peut supposer que les variables aléatoires sont indépendantes.
3. Pour un réel d positif, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne
$$\mathbb{P}(|Z-45| \geqslant d) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Z)}{d^2}.$$
On sait que $\mathbb{P}(Z-45 \geqslant d) \leqslant \mathbb{P}(|Z-45| \geqslant d) \leqslant \frac{163}{4d^2}$ On a $c-45 = d$ et on veut $\frac{163}{4(c-45)^2} \leqslant \frac{5}{100}$, on peut donc prendre $c = 74$.

Correction 31

1. $X(\Omega) = [\![-2,3]\!]$ et $((X=k))_{k\in X(\Omega)}$ définit un système complet d'événements. En particulier (attention ce n'est ici qu'une implication) :
$\sum_{k=-2}^{3} \mathbb{P}(X=k) = 1 \iff 10a = 1 \iff a = \frac{1}{10}$
2. $(X \leqslant 0) = (X=-2)\cup(X=-1)\cup(X=0)$.
Ces 3 événements étant 2 à 2 incompatibles :
$\mathbb{P}(X\leqslant 0) = \mathbb{P}(X=-2)+\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=0) = 4a$
D'après 1. $\mathbb{P}(X\leqslant 0) = \frac{4}{10}$
De même :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X|\leqslant 1) &= \mathbb{P}(-1\leqslant X\leqslant 1)\\ &= \mathbb{P}((X=-1)\cup(X=0)\cup(X=1))\\ &= \mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)\\ &\text{ par incompatibilité 2 à 2 des événements}\\ &= \frac{5}{10}\end{aligned}$$

3. D'après la définition de l'espérance, $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=-2}^{3} k\mathbb{P}(X=k)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

   $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$ (formule de Koenig-Huygens)

   Or d'après le théorème du transfert, $\mathbb{E}(X^2)=\sum_{k=-2}^{3} k^2\mathbb{P}(X=k)=\frac{34}{10}=\frac{17}{5}$

   D'où $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\frac{17}{5}-\frac{9}{25}=\frac{76}{25}$.

4. D'après la linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X)+1=\frac{8}{5}$.

   Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$. Avec $a=1$ et $b=1$, $Y=aX+b$ et $\mathbb{V}(Y)=\mathbb{V}(X)$

5. Comme $X(\Omega)=\{-2,-1,0,1,2,3\}$, on a $Z(\Omega)=[\![0,3]\!]$

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=0) &= \mathbb{P}(X=1)=3a\\ \mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}((X-1=1)\cup(X-1=-1))\\ &= \mathbb{P}((X=2)\cup(X=0))\\ &= \mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=0)\\ &= 2a\end{aligned}$$

   De même :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=2) &= \mathbb{P}((X=-1)\cup(X=3))=\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=3)=3a\\ \mathbb{P}(Z=3) &= \mathbb{P}(X=-2)=2a\end{aligned}.$$

   On obtient alors la loi de Z décrite par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Z=k)$	$3a$	$2a$	$3a$	$2a$

6. $T(\Omega)=\{0,1\}$ et $\mathbb{P}(T=1)=\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(T=0)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

   Comme X et T sont indépendantes :

   $\forall\ (i,j)\in T(\Omega)\times X(\Omega)$, $\mathbb{P}((T=i)\cap(X=j))=\mathbb{P}(T=i)\mathbb{P}(X=j)$.

   On obtient alors la loi conjointe de (T,X) suivante :

(T,X)	-2	-1	0	1	2	3
0	$\frac{4}{3}a$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a$	$2a$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{4}{3}a$
1	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	a	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$

   Comme X et T sont indépendantes, $\mathbb{E}(TX)=\mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$.

Correction 32 Notons, A_i : " tirer une boule blanche au i-ième tirage".

1. La première bille noire peut apparaître entre le rang 1 et le rang $b+1$, on a donc

   $$X(\Omega)=[\![1,b+1]\!].$$

   — On a $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(\overline{A_1})=\frac{n}{n+b}$ car au premier tirage, il y a n boules noires parmi les $n+b$ boules.

   — On a $(X=2)=\overline{A_1}\cap A_2$ donc

   $$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2)=\frac{b}{n+b}\times\frac{n}{n+b}.$$

   — De manière plus générale, pour $k\in[\![1,b+1]\!]$,

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}(\overline{A_3})\dots\mathbb{P}_{\overline{A_1\cap\dots\cap A_{k-1}}}(A_k)\\ &= \frac{b}{n+b}.\frac{b-1}{n+b-1}.\dots.\frac{b-k+2}{b+n-k+2}.\frac{n}{b+n-k}\\ &= \frac{b!(b-n-k)!n}{(b-k+1)!(b+n)!}\\ &= \frac{b!n.(n-1)!}{(b+n)!}.\frac{(b+n-k)!}{(b-k+1)!(n-1)!}\\ &= \frac{b!n!}{(b+n)!}\binom{b+n-k-1}{b-k+1}\end{aligned}$$

   On peut aussi faire un raisonnement de dénombrement. Pour cela, on modélise les $b+n$ tirages successifs par la donnée des numéros des tirages où on obtient des boules noires. Le nombre de cas total est donc le nb de parties à n éléments de $b+n$ (les n numéros des positions des boules noires) donc $\binom{b+n}{n}$. Comptons maintenant les cas favorables pour un $k\in[\![1,b+1]\!]$ fixé. L'événement $(X=k)$ est réalisé si on tire $k-1$ boules blanches puis une boule noire puis, dans n'importe quel ordre, les $n-1$ boules noires restantes et les $b-k+1$ boules blanches. Il y a donc autant de cas favorables que de façons de répartir $n-1$ boules noires au cours des $b+n-k$ derniers tirages donc $\binom{b+n-k}{n-1}$. On obtient donc

   $$P(X=k)=\frac{\binom{b+n-k}{n-1}}{\binom{b+n}{n}}.$$

   On retrouve le même résultat par symétrie du coefficient binomial.

2. On cherche maintenant à calculer la loi de Y où Y représente le rang d'apparition de la deuxième boule noire. On a $Y(\Omega)=[\![2,b+2]\!]$.

— On a $(Y=2)=A_1\cap A_2$ donc $\mathbb{P}(Y=2)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)=\dfrac{n}{n+b}.\dfrac{n-1}{n+b-1}=\dfrac{n!(n+b-2)!}{(n-2)!(n+b)!}$

— On peut obtenir $Y=3$ de deux façons différentes :

$$(Y=3)=\left(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3\right)\cup\left(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\right).$$

On remarque que les deux évènements ont la même probabilité, à savoir $\dfrac{n(n-1)b}{(n+b)(n+b-1)(n+b-2)}$ donc

$$\mathbb{P}(Y=3)=\frac{2n(n-1)b}{(n+b)(n+b-1)(n+b-2)}.$$

— Soit $k\in[\![2,b+2]\!]$. De manière plus générale, pour obtenir $Y=k$, cela signifie qu'il existe $i<k$ tel que A_i est réalisé et pour $j\neq i$, $\overline{A}_j$ est réalisé (ce qui revient à $(Y=k)\cap(X=i)$). Autrement dit, $Y=k$ est la réunion, pour i allant de 1 à $k-1$ d'évènements de la forme :

$$\overline{A}_1\cap\ldots\overline{A}_{i-1}\cap A_i\cap\overline{A}_{i+1}\cap\ldots\cap\overline{A_{k-1}}\cap A_k.$$

La probabilité d'un tel évènement est

$$\frac{b\times\ldots\times(b-k+3)\times n\times(n-1)}{(n+b)\times\ldots\times(n+b-+1)}=\frac{b!n!}{(b+n)!}.\frac{(n+b-k)!}{(b-k+2)!(n-2)!}=\frac{n!b!}{(b+n)!}\binom{n+b-k}{n-2}.$$

On remarque que cette probabilité ne dépend pas de i, chaque événement est donc de même probabilité. Il y a $k-1$ tels événements, on en déduit que

$$\mathbb{P}(Y=k)=\frac{(k-1)\binom{b+n-k}{n-2}}{\binom{b+n}{n}}.$$

Là encore, il est possible de raisonner avec du dénombrement. On reprend la même modélisation qu'à la question précédente (on identifie $b+n$ tirages successifs avec la donnée des positions des boules noires). Le nombre de cas possibles est $\binom{b+n}{n}$. Comptons maintenant les cas favorables. Soit $k\in[\![2,b+2]\!]$ est réalisé si on obtient

— 1 boule noire au cours des $k-1$ premiers tirages

— 1 boule noire au k-ième tirage.

— $n-2$ boules noires au cours des $b+n-k$ derniers tirages.

Il y a $k-1$ façons de tirer une boule noire au cours des $k-1$ premiers tirages, et pour chacune d'elles, $\binom{b+n-k}{n-2}$ façons de tirer $n-2$ boules noires au cours des $b+n-k$ derniers tirages. On a donc

$$\mathbb{P}(Y=k)=\frac{(k-1)\binom{b+n-k}{n-2}}{\binom{b+n}{n}}$$

et on retrouve bien la même probabilité

Correction 33 L'ensemble des valeurs prises par X est $[\![2,n]\!]$. Pour $k\in[\![2,n-1]\!]$, l'évènement $(X>k)$ est réalisé lorsque l'on a obtenu une suite strictement décroissante au cours des k premiers tirages. Pour déterminer la probabilité de cet évènement, on compte les cas possibles. Si on effectue k tirages successifs et sans remise, il y a $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ cas possibles. Le nombre de cas favorables est égal au nombre de parties à k éléments de n (une fois que l'on a les k éléments distincts, il suffit de les mettre dans l'ordre décroissant).

On a donc $\mathbb{P}(X>k)=\dfrac{\binom{n}{k}}{\frac{n!}{(n-k)!}}=\dfrac{1}{k!}$. On sait que $\mathbb{P}(X>1)=1$, cette formule peut donc être étendue à $k\in[\![1,n-1]\!]$.

Soit maintenant $k\in[\![2,n]\!]$, alors $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)$. En effet, l'évènement $X=k$ est réalisé lorsque $(X>k-1)$ est réalisé mais pas l'évènement $(X>k)$. On peut aussi le voir en disant que l'évènement $(X>k-1)$ est la réunion disjointe de $(X=k)$ et $(X>k)$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}=\frac{k-1}{k!}.$$

Correction 34

1. On commence par réfléchir à savoir sur quel univers on travaille. On peut apparenter la vidange de l'urne à une succession de $2n$ tirage valant B ou R. Toutefois, un $2n$-uplet quelconque à valeur dans $\{B,R\}$ ne convient pas car on sait qu'il y a précisément n boules blanches et n boules rouges. On veut donc compter les $2n$-uplets dans lesquels apparaissent exactement n boules blanches et n boules rouges. Pour cela, il suffit de savoir à quelle place apparaissent les boules rouges, autrement dit se donner une partie à n éléments de $2n$.
On a $X(\Omega)=[\![n,2n]\!]$. Soit $i\in[\![n,2n]\!]$, déterminons $\mathbb{P}(X=i)$.
Le nombre de cas possibles est $\binom{2n}{n}$. Pour le nombre de cas favorables, on sait qu'il y aura une boule rouge en position i et ensuite que des boules blanches. Les $n-1$ autres boules blanches ont donc été tirées entre les positions 1 et $i-1$. Il faut donc choisir les $n-1$ places parmi les $i-1$ premiers tirages où ont été tirées des boules rouges. Il y a donc $\binom{i-1}{n-1}$. On a donc $\mathbb{P}(X=i)=\dfrac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.

2. (a) On commence par écrire $\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}$ comme suggéré, en remarquant que cette formule n'est pas valable lorsque $k=p$, il faut donc sortir le terme en $k=p$ de la somme :

$$\sum_{k=p}^{m}\binom{k}{p}=1+\sum_{k=1}^{p}\left(\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)=1+\binom{m+1}{p+1}-1,$$

car on reconnaît une somme télescopique. On retrouve bien la formule souhaitée.

(b) On sait, par symétrie du triangle de Pascal, que $\binom{k}{p} = \binom{k}{k-p}$ donc on a

$$\sum_{k=p}^{m} \binom{k}{k-p} = \binom{m+1}{p+1}.$$

(c) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=n}^{2n} \frac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n} \\ &= \frac{n}{\binom{2n}{n}} \binom{2n+1}{n+1}\end{aligned}$$

en appliquant la formule montrée à la question précédente avec $p = n$ et $m = 2n$. On a donc :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n.(n!)^2}{(2n)!} \binom{2n+1}{n+1} = \frac{n.(n!)^2}{(2n)!} \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{n \times (2n+1)}{n+1}.$$

3. Pour calculer la variance, on commence par calculer

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} (n+k)^2 \binom{n+k-1}{k}.$$

On écrit $(n+k)^2 = (n+k)(n+k+1) - (n+k)$, ainsi :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} (n+k)(n+k+1) \binom{n+k-1}{k} - \mathbb{E}(X).$$

On calcule cette somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (n+k)(n+k+1)\binom{n+k-1}{k} &= \sum_{k=0}^{n} (n+k)(n+k+1) \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \\ &= n(n+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!} \\ &= n(n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1+k}{n+1} \\ &= n(n+1) \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{j}{n+1} = n(n+1)\binom{2n+2}{n+2}\end{aligned}$$

en utilisant, à nouveau, le lemme avec $p = n+1$ et $m = 2n+1$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \frac{n.(n!)^2(n+1)}{(2n)!}\binom{2n+2}{n+2} - \frac{n \times (2n+1)}{n+1} - \left(\frac{n \times (2n+1)}{n+1}\right)^2 \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)n}{(n+2)} - \frac{n \times (2n+1)}{n+1} - \left(\frac{n \times (2n+1)}{n+1}\right)^2 \\ &= \frac{2n(2n+1)(n+1)^3 - (2n+1)(n+1) - (2n+1)^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\end{aligned}$$

Correction 35

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $X_k(\Omega) = [\![0, 1]\!]$, donc X_k suit une loi de Bernoulli.
   Les chevaux se répartissant au hasard, chaque emplacement est équiprobable. Donc il y a une chance sur n que le cheval numéro k se retrouve dans l'emplacement numéro k : $\mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{n}$.
   Donc X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.
   Par conséquent, $\mathbb{E}(X_k) = \dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{V}(X_k) = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n-1}{n^2}$
2. Soit $(k, l) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $k \neq l$.
   Le produit $X_k X_l$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, et est égal à 1 si et seulement si $X_k = 1$ et $X_l = 1$. D'où :
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_k X_l) &= 0 \times \mathbb{P}(X_k X_l = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X_k X_l = 1) \\ &= \mathbb{P}((X_k = 1) \cap (X_l = 1)) \\ &= \mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}_{(X_k=1)}(X_l = 1)\end{aligned}$$
   $\mathbb{P}_{(X_k=1)}(X_l = 1)$ est la probabilité que le cheval numéro l soit dans l'emplacement numéro l sachant que le cheval numéro k est dans son emplacement : il y a cette fois une chance sur $n-1$.
   D'où : $\mathbb{E}(X_k X_l) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n-1}$
3. Soit $(k, l) \in [\![1, n]\!] X_l)$
   Donc X_k et X_l ne sont pas indépendantes
4. Remarquons que $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ est la somme de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre, mais pas 2 à 2 indépendantes, donc pas mutuellement indépendantes. S ne suit donc pas une loi binomiale.
   Or l'espérance est linéaire : $\mathbb{E}(S) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n} = n \times \dfrac{1}{n} = 1$: $\mathbb{E}(S) = 1$
   D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \mathbb{E}(X_k X_l) - \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \right) \\
&= n \times \frac{n-1}{n^2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left((n-(k+1)+1) \times \frac{1}{n(n-1)} \right) \\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2} \\
&\text{somme des termes consécutifs de la suite arithmétique} (u_k)_k = (n-k)_k \\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{V}(S) = 1$

Correction 36 Soit x un réel positif, on a raisonne par équivalence :

$$Y \geqslant x \Leftrightarrow \alpha(X-\mu) + \sigma \geqslant \sqrt{x} \text{ ou } \alpha(X-\mu) + \sigma \leqslant -\sqrt{x}$$

et

$$\alpha(X-\mu) + \sigma \geqslant \sqrt{x} \Leftrightarrow X - \mu \geqslant \frac{\sqrt{x} - \sigma}{\alpha}.$$

Pour x tel que $\dfrac{\sqrt{x}-\sigma}{\alpha} = \alpha\sigma$, c'est-à-dire pour $\sqrt{x} = (\alpha^2+1)\sigma$, on a

$$\mathbb{P}(X - \mu \geqslant \alpha\sigma) \leqslant \mathbb{P}(Y \geqslant x),$$

donc

$$\mathbb{P}(X \geqslant \mu + \alpha\sigma) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{x},$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable positive Y. On a

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left((\alpha(X-\mu)+\sigma)^2\right) = \mathbb{V}(\alpha(X-\mu)+\sigma) + \left(\mathbb{E}(\alpha(X-\mu)+\sigma)\right)^2 = \alpha^2 \mathbb{V}(X) + \left(\alpha \underbrace{(\mathbb{E}(X)-\mu)}_{=0} + \sigma \right)^2 = \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2$$

On a donc

$$\mathbb{P}(X \geqslant \mu + \alpha\sigma) \leqslant \frac{\alpha^2(1+\sigma^2)}{(\alpha(1+\sigma^2))^2},$$

d'où l'inégalité souhaitée.

Correction 37

1. (a) Le tirage est successif avec remise, il est donc modélisé par un couple (i,j) de $[\![1,N]\!]$ donc $\Omega = [\![1,N]\!]^2$ et $\#\Omega = N^2$. On a $X(\Omega) = [\![1,N]\!]$. Déterminons la loi de X. On a :
   - $(X=1)$ si on tire $(1,1)$ il y a donc un unique cas favorable donc $\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{1}{N^2}$.
   - $(X=2)$ si on tire $(1,2),(2,2)$ ou $(2,1)$, il y a donc trois cas favorables donc $\mathbb{P}(X=2) = \dfrac{3}{N^2}$.
   - De manière générale, pour avoir $(X=k)$ on doit avec (i,k) ou (k,i) avec $i<k$ (il y a $2\times(k-1)$ cas) ou bien (k,k) (1 cas) donc $2(k-1)+1 = 2k-1$ cas favorables. Ainsi $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{2k-1}{N^2}$.

   (b) Pour calculer l'espérance de X, on doit calculer :

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(2k-1)k}{N^2} = \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N^2}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{3} - \frac{N(N+1)}{2} \right) = \frac{(N+1)(4N-}{6N}$$

   L'espérance de X est donc $\dfrac{(N+1)(4N-1)}{6N}$.

   (c) On détermine la loi de Y :
   - On a $Y=1$ si on a un tirage de la forme $(1,i)$ ou $(i,1)$ avec $i>1$ ($2(N-1)$ choix) ou bien $(1,1)$, on a donc $2N-1$ cas favorables donc $\mathbb{P}(Y=1) = \dfrac{2N-1}{N^2}$.
   - On a $Y=2$ si on a un tirage de la forme $(2,i)$ ou $(i,2)$ avec $i>2$ ($2(N-2)$ choix) ou bien $(2,2)$, on a donc $2N-3$ cas favorables donc $\mathbb{P}(Y=2) = \dfrac{2N-3}{N^2}$.
   - De manière générale, on a $Y=k$ si on a un tirage de la forme (k,i) ou (i,k) avec $i>k$ ($2(N-k)$ choix) ou bien (k,k), on a donc $2(N-k)+1$ cas favorables donc $\mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{2(N-k)+1}{N^2}$.

   On remarque que $Y = \dfrac{2}{N} - X$ donc $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{2}{N} - \mathbb{E}(X)$.

2. Ici, on a $\Omega = \{(i,j) \in [\![1,N]\!], i \neq j\}$. On a $\#\Omega = N(N-1)$.
   On commence par déterminer la loi de X. Comme le tirage est sans remise, on a désormais $X(\Omega) = [\![2,N]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1,N-1]\!]$.
   - On a $(X=2)$ si on fait le tirage $(1,2)$ ou $(2,1)$ donc il y a deux cas favorables. On a donc $\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{2}{N(N-1)}$.
   - De manière plus générale, on a $(X=k)$ si on a un tirage de la forme (i,k) ou (k,i) avec $i<k$, il y a donc $2(k-1)$ cas favorables donc $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{2(k-1)}{N(N-1)}$

On calcule l'espérance de X, on a

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=2}^{N}\frac{2k(k-1)}{N(N-1)}.$$

On remarque que pour $k=1$, on a 0, on va donc faire commencer la somme à 1 pour avoir les formules que l'on connaît. On a

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{N(N-1)}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{3}-\frac{N(N+1)}{2}\right)=\frac{(N+1)(4N-1)}{6(N-1)}.$$

On détermine la loi de Y. On a :

— $(Y=1)$ lorsque l'on a un tirage de la forme $(1,i)$ ou $(i,1)$ avec $i>1$, il y a donc $2(N-1)$ cas favorables donc $\mathbb{P}(Y=1)=\dfrac{2(N-1)}{N(N-1)}$.

— $(Y=k)$ lorsque l'on a un tirage de la forme (k,i) ou (i,k) avec $i>k$, il y a donc $2(N-k)$ cas favorables donc $\mathbb{P}(Y=k)=\dfrac{2(N-k)}{N(N-1)}$.

On remarque que $Y=\dfrac{2}{N}-X$ donc $\mathbb{E}(Y)=\dfrac{2}{N}-\mathbb{E}(X)$.

3. On a $\Omega=\mathscr{P}_m\left([\![1,N]\!]\right)$ (ensemble des parties à m éléments de $[\![1,N]\!]$), donc $\#\Omega=\binom{N}{m}$.

(a) Pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, on a $X_k(\Omega)=\{0,k\}$ (deux valeurs possibles). On a $(X_k=0)$ si la poignée a été prélevée dans l'ensemble des entiers différents de k, il y a donc $\binom{n-1}{m}$ cas favorables. Après simplification, on trouve

$$\mathbb{P}(X_k=0)=\frac{N-m}{N}.$$

On a $(X_k=k)$ si on a prélevé la boule numéro k et $m-1$ boules parmi les $N-1$ boules différentes de k, il y a donc $\binom{n-1}{m-1}$ cas favorables. Après simplification, on trouve $\mathbb{P}(X_k=k)=\dfrac{m}{N}$. On a donc $\mathbb{E}(X)=\dfrac{km}{N}$.

(b) On note maintenant S la somme des boules. On remarque que $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}X_k$, on a donc

$$\mathbb{E}(S)=\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}(X_k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{km}{N}=\frac{m(N+1)}{2}.$$

Correction 38

1. (a) La longueur de la première série peut varier entre 1 et n par définition. Donc $L_1(\Omega_n)=[\![1,n]\!]$

(b) Pour obtenir $(L_1=m)$, on a 2 cas possibles :

— m piles consécutifs puis face ;

— m faces consécutifs puis pile.

Ainsi : $(L_1=m)=\left[\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{m}P_i\right)\cap F_{m+1}\right]\cup\left[\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{m}F_i\right)\cap P_{m+1}\right]$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_1=m)&=P\left(\left[\left(\bigcap_{i=1}^{m}P_i\right)\cap F_{m+1}\right]\cup\left[\left(\bigcap_{i=1}^{m}F_i\right)\cap P_{m+1}\right]\right)\\
\textit{or}\quad&\left[\left(\bigcap_{i=1}^{m}P_i\right)\cap F_{m+1}\right]\cap\left[\left(\bigcap_{i=1}^{m}F_i\right)\cap P_{m+1}\right]=\emptyset\\
\mathbb{P}(L_1=m)&=P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m}P_i\right)\cap F_{m+1}\right)+P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m}F_i\right)\cap P_{m+1}\right)\\
&=\left(\prod_{i=1}^{m}\mathbb{P}(P_i)\right)\mathbb{P}(F_{m+1})+\left(\prod_{i=1}^{m}\mathbb{P}(F_i)\right)\mathbb{P}(P_{m+1})\quad\textit{par indépendance mutuelle}\\
&=p^mq+q^mp
\end{aligned}$$

(c) Pour obtenir $(L_1=n)$, on a 2 cas possibles :

— n piles consécutifs ;

— n faces consécutifs.

Ainsi : $(L_1=n)=\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}P_i\right)\cup\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}F_i\right)$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_1=n)&=P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n}P_i\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}F_i\right)\right)\\
\text{or}\quad&\left(\bigcap_{i=1}^{n}P_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}F_i\right)=\emptyset\\
\mathbb{P}(L_1=n)&=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}P_i\right)+P\left(\bigcap_{i=1}^{n}F_i\right)\\
&=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(P_i)+\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(F_i)\ \textit{par indépendance mutuelle}\\
&=p^n+q^n
\end{aligned}$$

(d) $$\sum_{m=1}^{n}\mathbb{P}(L_1=m)=q\sum_{m=1}^{n-1}p^m+p\sum_{m=1}^{n-1}q^m+p^n+q^n$$

Or $\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1}p^m$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique $(p^m)_{m\geqslant 1}$ de raison $p\neq 1$ donc : $\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1}p^m=\frac{p-p^n}{1-p}=\frac{p-p^n}{q}$

De même, $\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1}q^m=\frac{q-q^n}{1-q}=\frac{q-q^n}{p}$

D'où : $\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n}\mathbb{P}(L_1=m) &= q\frac{p-p^n}{q}+p\frac{q-q^n}{p}+p^n+q^n\\ &= p+q\\ &= 1\end{aligned}$

2. (a) On peut avoir $L_2=0$ s'il n'y a pas de deuxième série (dans le cas où $L_1=n$).
Si $L_1=m\in[\![1,n-1]\!]$, alors les longueurs maximales possibles sont $n-m$ avec $1\leqslant n-m\leqslant n-1$.
Donc $L_2(\Omega_n)=[\![0,n-1]\!]$

(b) Pour obtenir $(L_1=m)\cap(L_2=k)$, on a 2 cas possibles :
— m piles consécutifs puis k faces consécutifs puis pile ;
— m faces consécutifs puis k piles consécutifs puis face.
Ainsi :

$$\begin{aligned}(L_1=m)\cap(L_2=k) &= \left[\left(\bigcap_{i=1}^{m}P_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{m+k}F_i\right)\cap P_{m+k+1}\right]\\ &\quad\cup\left[\left(\bigcap_{i=1}^{m}F_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{m+k}P_i\right)\cap F_{m+k+1}\right]\end{aligned}$$

De même qu'en 1.b) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((L_1=m)\cap(L_2=k)) &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m}P_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{m+k}F_i\right)\cap P_{m+k+1}\right)\\ &\quad+P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m}F_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{m+k}P_i\right)\cap F_{m+k+1}\right)\\ &\quad\textit{par incompatibilité des 2 événements}\\ &\quad\textit{correspondant aux 2 cas possibles}\\ &= \left(\prod_{i=1}^{m}\mathbb{P}(P_i)\right)\left(\prod_{i=m+1}^{m+k}\mathbb{P}(F_i)\right)\mathbb{P}(P_{m+k+1})\\ &\quad+\left(\prod_{i=1}^{m}\mathbb{P}(F_i)\right)\left(\prod_{i=m+1}^{m+k}\mathbb{P}(P_i)\right)\mathbb{P}(F_{m+k+1})\\ &\quad\textit{par indépendance mutuelle}\\ &= p^mq^kp+q^mp^kq\\ &= p^{m+1}q^k+q^{m+1}p^k\end{aligned}$$

(c) Pour obtenir $(L_1=m)\cap(L_2=k)$ avec $m+k=n$, on a 2 cas possibles :
— m piles consécutifs puis k faces consécutifs ;
— m faces consécutifs puis k piles consécutifs.
Ainsi :

$$(L_1=m)\cap(L_2=k) = \left[\left(\bigcap_{i=1}^{m}P_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n}F_i\right)\right]\cup\left[\left(\bigcap_{i=1}^{m}F_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n}P_i\right)\right]$$

De même qu'en 1.b), en notant $a_{m,k}=\mathbb{P}((L_1=m)\cap(L_2=k))$:

$$\begin{aligned}a_{m,k} &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m}P_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n}F_i\right)\right)+P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m}F_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n}P_i\right)\right)\\ &\quad\textit{par incompatibilité des 2 événements}\\ &\quad\textit{correspondant aux 2 cas possibles}\\ &= \left(\prod_{i=1}^{m}\mathbb{P}(P_i)\right)\left(\prod_{i=m+1}^{n}\mathbb{P}(F_i)\right)+\left(\prod_{i=1}^{m}\mathbb{P}(F_i)\right)\left(\prod_{i=m+1}^{n}\mathbb{P}(P_i)\right)\\ &\quad\textit{par indépendance mutuelle}\\ &= p^mq^{n-m}+q^mp^{n-m}\end{aligned}$$

Correction 39

1. Il y aura toujours au moins une case non vide, et au plus n après n lancers, sachant toutefois qu'on ne peut dépasser N cases non vides dans le cas où $N<n$ donc :
$$T_n(\Omega)=\{1;2;\ldots;\min(n,N)\}.$$

2. Après 1 lancer, il y aura toujours exactement une case non vide (celle dans lequel on a lancé la boule), donc $T_1=1$ (variable aléatoire constante).
Au deuxième lancer, soit on relance dans la même case qu'au premier, et on a alors $T_2=1$, soit on lance dans une autre et $T_2=2$. La probabilité de lancer dans la même case étant $\frac{1}{N}$, on a :
$$P(T_2=1)=\tfrac{1}{N},\text{ et }P(T_2=2)=\tfrac{N-1}{N}.$$

3. Pour avoir $T_n=1$, il faut avoir obtenu à chaque lancer à partir du deuxième la même case qu'au premier lancer, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{N}$ à chaque lancer, soit $P(T_n=1)=\left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$.
Le nombre de tirages donnant $T_n=2$ est obtenu en choisissant deux cases parmi les N, puis en se laissant deux possibilités à chaque tirage, et en supprimant à la fin les 2 tirages où on a tiré toujours dans la même case, soit $\binom{N}{2}\times(2^n-2)=(2^{n-1}-1)N(N-1)$. Ceci est à diviser par le nombre total de tirages, qui vaut N^n, donc :
$$P(T_n=2)=\tfrac{(N-1)(2^{n-1}-1)}{N^{n-1}}.$$

4. Si $n\leqslant N$, $T_n=n$ si on tombe dans une nouvelle case à chaque tirage, ce qui correspond à $N(N-1)\ldots(N-n+1)$ tirages, soit :
$$P(T_n=n)=\tfrac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{N^n}=\tfrac{N!}{(N-n)!N^n}.$$
Si $n>N$, on ne peut pas avoir n cases non vides, donc $P(T_n=n)=0$.

5. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Les évènements $(T_n=i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ forment un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T_{n+1}=k)=\sum_{i=1}^{n} P(T_n=i)\,\mathbb{P}_{T_n=i}(T_{n+1}=k)\,.$$

Parmi les probabilités conditionnelles apparaissant dans cette formule, seules deux sont non nulles :

— soit on avait déjà k cases non vides après n tirages et on a à nouveau tiré dans une de ces k cases (probabilité $\mathbb{P}_{T_n=k}(T_{n+1}=k)=\frac{k}{N}$).

— soit on en avait $k-1$ non vides et on a tiré dans une des $N-(k-1)$ cases restantes :

$$\mathbb{P}_{T_n=k-1}(T_{n+1}=k)=\frac{N-k+1}{N}$$

.

6. (a) Notons pour commencer que la formule de la question 6 reste en fait valable pour $k=n+1$, puis sommons ces égalités :

$$G_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(T_{n+1})x^k$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{k}{N}P(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1)\right)x^k$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1}kP(T_n=k)\,x^k+(N-k+1)P(T_n=k-1)\,x^k$$

$$=\frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n}kP(T_n=k)\,x^{k-1}+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}(N-k)P(T_n=k)\,x^{k+1}$$

$$=\frac{x}{N}G_n'(x)+\frac{x}{N}\textstyle\sum_{k=1}^{n}NP(T_n=k)\,x^k-\frac{x^2}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kP(T_n=k)\,x^{k-1}$$

$$=\frac{x}{N}G_n'(x)+xG_n(x)-\frac{x^2}{N}G'n(x)$$

On peut aussi enlever le terme en $k+1$ et constater qu'il correspond au terme manquant de la somme après changement d'indice.

(b) Dérivons donc :

$$G_{n+1}'(x)=\frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x)+\frac{1}{N}\left(x-x^2\right)G_n''(x)+G_n(x)+xG_n'(x).$$

En prenant $x=1$ (ce qui a le bon goût d'annuler le terme faisant intervenir la dérivée seconde) et en réutilisant les résultats précédents, on a

$$\mathbb{E}(T_{n+1})=-\frac{1}{N}\mathbb{E}(T_n)+1+\mathbb{E}(T_n)=\left(1-\frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n)+1$$

car $\mathbb{E}(T_n)=G_n'(1)$.

(c) Posons $u_n=$
$E(T_n)$ alors (u_n) est une suite vérifiant $u_{n+1}=au_n+b$. On sait calculer son terme général :

$$\mathbb{E}(T_n)=N-\frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}=N(1-(1-\frac{1}{N})^n)$$

D'où $\lim_{n\to+\infty}$
$E(T_n)=N$.

(d) X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n$.

On sait que $T_n=\sum_{k=1}^{N}X_i$ donc :

$$\mathbb{E}(T_n)=\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}(X_i)=\sum_{k=1}^{N}1-\left(\tfrac{N-1}{N}\right)^n=N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)$$