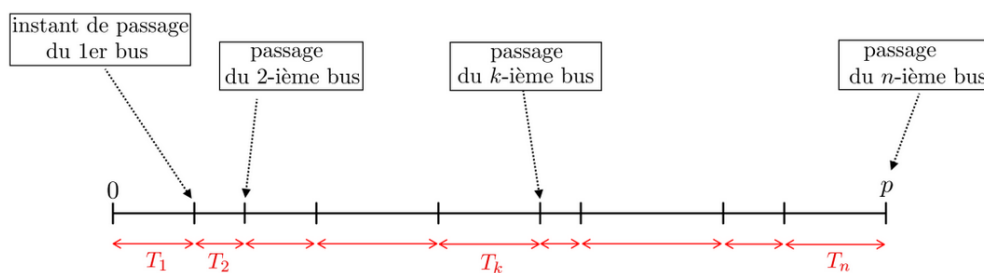


**Exercice 1** (Paradoxe de l'arrêt de bus).

"À l'arrêt de bus en bas de chez moi, un bus passe "en moyenne" une fois toutes les 10 min, mais pourtant j'ai le sentiment de devoir l'attendre "en moyenne" bien plus de 5 min."

Cette phrase, sans doute en partie inspirée par une mauvaise foi bien française, a malgré tout un certain fondement mathématique, et c'est ce que cet exercice se propose de démontrer. Pour cela on modélise la situation de la façon suivante.

- On considère une journée ordinaire découpée en  $p$  minutes ( $p \in \mathbb{N}^*$ ), de sorte que le temps est représenté par l'intervalle d'entiers  $\llbracket 0, p \rrbracket$ , comme s'il s'agissait d'une suite d'instants.
- À un arrêt de bus fixé vont passer pendant cette journée  $n$  bus ( $n \geq 2$ ). Les temps d'attente entre ces bus successifs sont notés  $T_1, \dots, T_n$ . On suppose que le dernier bus (le  $n$ -ième) passe à l'instant  $p$ , à la toute fin de la journée.



- Les  $T_k$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $\llbracket 0, p \rrbracket$  qui ont toutes la même loi. On ne fait pas d'hypothèse particulière sur cette loi. On note  $m$  son espérance et  $\sigma^2$  sa variance.
- Un individu arrive à l'improviste à cet arrêt de bus et on note  $A$  son horaire d'arrivée. On suppose que  $A$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , et qu'elle est indépendante des  $T_k$ . La variable aléatoire  $N$  désigne le numéro du bus qu'il va prendre, ou autrement dit :

$$N = \min\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } A \leq T_1 + \dots + T_i\}.$$

Le paradoxe que l'on va montrer consiste en le fait que la variable  $T_N$ , le temps d'attente pour le bus que prend l'individu, a une espérance supérieure à celle des  $T_k$ .

1. Montrer :  $m = \frac{p}{n}$
2. Montrer que, si l'on suppose  $\sigma^2 > 0$ , alors les variables  $T_1, \dots, T_n$  ne sont pas indépendantes.
3. On fixe dans cette question  $t \in \llbracket 0, p \rrbracket$  et  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le but est de montrer :

$$\mathbb{P}_{(T_k=t)}(N = k) = \frac{t}{p}.$$

Il est conseillé de commencer par réfléchir à pourquoi cette formule est "logique" avant de passer à sa démonstration. Pour cela, on pose les événements :

$$\forall i \in \llbracket 0, p - t \rrbracket, V_i : \text{"le bus } k - 1 \text{ passe à l'instant } i \text{ et le bus } k \text{ passe à l'instant } i + t"$$

avec la convention que le "bus 0" passe à l'instant 0.

- (a) Faire un lien entre l'évènement  $T_k = t$  et les  $V_i$ .
  - (b) Montrer que pour chaque évènement  $V_i$  de probabilité non nulle, on a  $\mathbb{P}_{V_i}(N = k) = \frac{t}{p}$ .
  - (c) Dédire des deux questions précédentes le résultat voulu.
4. En déduire que  $N$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .
  5. Montrer pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $\mathbb{E}(T_N) = \frac{n}{p} \mathbb{E}(T_k^2)$ .
  6. En déduire une expression de  $\mathbb{E}(T_N)$  en fonction de  $m$  et  $\sigma^2$ , et conclure sur le paradoxe exprimé dans l'énoncé.
  7. Expliquer précisément dans quelle situation on a égalité entre  $\mathbb{E}(T_N)$  et  $m$ , et ce que signifie cette situation dans la vie réelle.
  8. On suppose que la covariance  $\text{Cov}(T_i, T_j)$  pour deux bus différents  $i$  et  $j$ , ne dépend pas du couple  $(i, j)$ , et on la note  $c$ . Calculer  $c$  et interpréter son signe.

**Exercice 2.**

On note  $l^2(\mathbb{N})$  l'ensemble des suites réelles  $U = (U_n)$  telles que la série  $\sum U_n^2$  converge. Sous réserve d'existence, on pose pour  $U, V \in l^2(\mathbb{N})$ :

$$\langle U, V \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n V_n.$$

1. Pour  $\alpha$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_n = \frac{1}{n^\alpha + 1}$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha$ , la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle un élément de  $l^2(\mathbb{N})$  ?
2. Produit scalaire sur  $l^2(\mathbb{N})$ :
  - (a) Démontrer  $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .
  - (b) En déduire que si  $U, V \in l^2(\mathbb{N})$ ,  $\langle U, V \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n V_n$  est bien défini.
  - (c) Montrer que  $l^2(\mathbb{N})$  est un espace vectoriel et que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $l^2(\mathbb{N})$ .
  - (d) On pose

$$S = \left\{ U \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = 0 \right\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang et dont la somme des termes est nulle. Montrer que  $S$  est un sous-espace vectoriel de  $l^2(\mathbb{N})$ .

- (e) Montrer que  $S^\perp = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$ .
- (f) En déduire que  $S \subsetneq (S^\perp)^\perp$ .

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[-\pi, \pi]$  à valeurs réelles que l'on munit du produit scalaire défini, pour  $f, g \in E$ , par

$$\langle f | g \rangle_E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

On admet que  $\langle | \rangle_E$  est un produit scalaire sur  $E$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $0 \leq k \leq n$ , on définit la fonction  $f_k \in E$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_k(t) = \cos(kt).$$

De même pour  $1 \leq k \leq n$ , soit  $g_k \in E$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_k(t) = \sin(kt).$$

On note  $\mathcal{F}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$  et  $F_n = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ .

### 3. Une famille orthonormée de $E$ .

Dans cette question, on fixe  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Soient  $u, v \in \mathbb{R}$ . Donner une expression de  $\cos(u)\cos(v)$  et de  $\sin(u)\sin(v)$  en fonction de  $\cos(u+v)$  et de  $\cos(u-v)$ .
- Démontrer que  $\mathcal{F}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$  est une famille orthogonale dans  $E$ .
- Calculer la norme des vecteurs de  $\mathcal{F}_n$ .
- Montrer que  $F_n$  est de dimension finie et déterminer sa dimension.

### 4. Une projection orthogonale.

Soit  $h \in E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $p_{F_n}(h)$  le projeté orthogonal de  $h$  sur  $F_n$ .

- Montrer qu'il existe un unique couple de suites  $(a_k(h))_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(b_k(h))_{k \in \mathbb{N}}$  tel que  $b_0(h) = 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{F_n}(h) = \sum_{k=0}^n a_k(h) f_k + \sum_{k=1}^n b_k(h) g_k.$$

Exprimer pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k(h)$  et  $b_k(h)$  à l'aide d'intégrales.

- On note  $\|h\|_E = \sqrt{\langle h | h \rangle_E}$ . Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|p_{F_n}(h)\|_E \leq \|h\|_E.$$

- Justifier que les suites  $(a_k(h))_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(b_k(h))_{k \in \mathbb{N}}$  sont des éléments de  $l^2(\mathbb{N})$  et que

$$a_0(h)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(h)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(h)^2 \leq \|h\|_E^2.$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer

$$\inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin(kt) \right)^2 dt \right).$$

### Exercice 3.

Dans toute cette partie,  $n$  est un entier strictement positif fixé.

On note  $\Phi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = ((X^2 - 1)P)''.$$

- Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- (a) Donner la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique.

- (b) En déduire qu'il existe  $n + 1$  réels distincts  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ , que l'on précisera, tels que pour tout  $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\Phi - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$  n'est pas bijective.
- (c) Quel est le rang de  $\Phi - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$  ?
3. Prouver que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\text{Ker}(\Phi - \lambda_k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$  contient un unique polynôme unitaire, que l'on notera  $P_k$  dans la suite de l'exercice.
4. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
- (a) Prouver que  $\deg P_k = k$ .
- (b) Soit  $Q_k = P_k(-X)$ . Montrer que  $\Phi(Q_k) = \lambda_k Q_k$ , et en déduire que  $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$ .
5. Calculer  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .

Pour  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose

$$(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) (1 - t^2) dt.$$

6. Prouver que  $(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .
7. Prouver que pour tous  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ ,  $(\Phi(P) | Q) = (P | \Phi(Q))$ .
8. En déduire que  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
9. Prouver que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ .

## Correction du DS n 0

---

**Exercice 1** 1. D'après l'énoncé, on a  $T_1 + \dots + T_n = p$  (la somme de tous les temps d'attente est égale à la totalité des instants de la journée). Par linéarité de l'espérance, et comme les  $T_i$  suivent toutes la même loi, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_1 + \dots + T_n) &= \mathbb{E}(p) = p \\ \text{Donc: } \mathbb{E}(T_1) + \dots + \mathbb{E}(T_n) &= p \\ \text{Donc: } n \times m &= p \end{aligned}$$

On en déduit que  $m = \frac{p}{n}$ .

2. Supposons  $\sigma^2 > 0$ . Supposons par l'absurde que les variables  $T_1, \dots, T_n$  sont indépendantes. Alors on a :

$$\mathbb{V}(T_1 + \dots + T_n) = \mathbb{V}(T_1) + \dots + \mathbb{V}(T_n) = n \times \sigma^2 \neq 0,$$

car les  $T_i$  suivent la même loi. Or, on a :

$$\mathbb{V}(T_1 + \dots + T_n) = \mathbb{V}(p) = 0 \quad : \quad \text{Absurde!}$$

Conclusion : les variables  $T_1, \dots, T_n$  sont non indépendantes.

3. (a) On a

$$\boxed{[T_k = t] = \bigcup_{i=0}^{p-t} V_i}$$

(b) Soit  $i \in \llbracket 0, p-t \rrbracket$ . Supposons  $\mathbb{P}(V_i) > 0$ . Sachant  $V_i$ , on sait que le bus  $k-1$  passe à l'instant  $i$  et le bus  $k$  passe à l'instant  $i+t$ . L'évènement  $(N = k)$  signifie alors que la personne arrive entre les instants  $(i+1)$  et  $(i+t)$ .

$$\mathbb{P}_{V_i}(N = k) = \mathbb{P}_{V_i}(i+1 \leq A \leq i+t)$$

Or,  $A$  est indépendante des  $T_j$ , et l'évènement  $V_i$  ne dépend que des  $T_j$ , donc  $A$  est indépendante de  $V_i$ . D'où :

$$\mathbb{P}_{V_i}(i+1 \leq A \leq i+t) = \mathbb{P}(i+1 \leq A \leq i+t)$$

Enfin la loi de  $A$  est la loi uniforme sur  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , donc cette dernière probabilité vaut  $\frac{t}{p}$ .  
Finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}_{V_i}(N = k) = \frac{t}{p}}$$

(c) On détaille ici deux méthodes.

• **Méthode 1:** On a par définition

$$\mathbb{P}_{[T_k=t]}(N = k) = \frac{\mathbb{P}([T_k = t] \cap [N = k])}{\mathbb{P}(T_k = t)}$$

Or, d'après la question 3a, comme les  $V_i$  sont des événements disjoints,

$$\mathbb{P}(T_k = t) = \mathbb{P}(V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{p-t}) = \sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}(V_i)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T_k = t] \cap [N = k]) &= \mathbb{P}([V_0 \cup \dots \cup V_{p-t}] \cap [N = k]) = \sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}(V_i \cap [N = k]) \\ &= \sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}(V_i) \mathbb{P}_{V_i}(N = k) \\ &= \sum_{i=0}^{p-t} \frac{t}{p} \mathbb{P}(V_i) \quad \leftarrow \text{par Q3b} \\ &= \frac{t}{p} \sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}(V_i) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}_{T_k=t}(N = k) = \frac{\frac{t}{p} \sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}(V_i)}{\sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}(V_i)} = \frac{t}{p}$$

Ainsi, on a montré que  $\boxed{\mathbb{P}_{T_k=t}(N = k) = \frac{t}{p}}$ .

- **Méthode 2:** Remarquons que  $\mathbb{P}_{[T_k=t]}$  est une probabilité. Dans cet univers, les  $(V_i)_{i=0}^{p-t}$  forment un SCE. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[T_k=t]}(N = k) &= \sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}_{[T_k=t]}(V_i) (\mathbb{P}_{[T_k=t]}|_{V_i})(N = k) \\
&= \sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}_{[T_k=t]}(V_i) \mathbb{P}_{[T_k=t] \cap V_i}(N = k) \\
&= \sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}_{[T_k=t]}(V_i) \mathbb{P}_{V_i}(N = k) \quad \leftarrow \text{car } V_i \subset [T_k = t] \\
&= \sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}_{T_k=t}(V_i) \times \frac{t}{p} \quad \leftarrow \text{par Q3b} \\
&= \frac{t}{p} \underbrace{\sum_{i=0}^{p-t} \mathbb{P}_{[T_k=t]}(V_i)}_{=1} \\
&= \frac{t}{p}
\end{aligned}$$

On a montré de même:  $\boxed{\mathbb{P}_{[T_k=t]}(N = k) = \frac{t}{p}}$ .

**Remarque.** Remarque du professeur : on peut vérifier que l'on a effectivement :

$$(\mathbb{P}_A)_B = \mathbb{P}_{A \cap B}$$

**Remarque.** Remarque du professeur : les calculs sont ici faits en supposant les  $V_i$  tous de proba non nulle. Notons que, si certains  $V_i$  sont de proba nulle, ils n'interviennent pas dans la somme; on peut donc sans problème conditionner par  $V_i$  pour les autres éléments non nuls de la somme; le résultat ainsi démontré dans cette question est donc aussi correct.

4. On a tout d'abord  $N(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ .

De plus, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $(T_k = t)_{t=0}^p$  forme un SCE.

Par la formule des probabilités totales, on a alors, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k) &= \sum_{t=0}^p \mathbb{P}(T_k = t) \underbrace{\mathbb{P}_{[T_k=t]}(N = k)}_{=\frac{t}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{t=0}^p t \mathbb{P}(T_k = t) = \frac{1}{p} \mathbb{E}(T_k) \\
&= \frac{1}{p} \times \frac{p}{n} \quad \leftarrow \text{par Q2} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

On en déduit que  $\boxed{N \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)}$ .

5. On remarque déjà que

$$[T_N = t] = \bigcup_{k=1}^n ([N = k] \cap [T_k = t])$$

Cette formule exprime le fait que l'événement  $T_N = t$  se décompose en une réunion disjointe d'événements selon la valeur de  $N$  de 1 à  $n$ ; et si  $N = k$ , alors on a  $T_N = t$  si et seulement si  $T_k = t$ .

On a alors par définition de l'espérance, puis en utilisant la décomposition ci-dessus (les unions étant disjointes):

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(T_N) &= \sum_{t=0}^p t \mathbb{P}(T_N = t) = \sum_{t=0}^p \sum_{k=1}^n t \mathbb{P}([N = k] \cap [T_k = t]) \\
 &= \sum_{t=0}^p \sum_{k=1}^n t \mathbb{P}(T_k = t) \mathbb{P}_{[T_k=t]}(N = k) \\
 &= \sum_{t=0}^p \sum_{k=1}^n t \times \frac{t}{p} \times \mathbb{P}(T_k = t) \quad \leftarrow \text{par Q3c} \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{t=0}^p t^2 \mathbb{P}(T_k = t)}_{=\mathbb{E}(T_k^2)} \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k^2) \\
 &= \frac{1}{p} \times n \mathbb{E}(T_k^2) \quad \leftarrow \left( \begin{array}{l} \text{pour n'importe quel } k \text{ car} \\ \text{les } T_k \text{ suivent la même loi} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

On a bien montré  $\boxed{\mathbb{E}(T_N) = \frac{n}{p} \mathbb{E}(T_k^2)}$ .

6. On sait que  $\mathbb{V}(T_k) = \mathbb{E}(T_k^2) - \mathbb{E}(T_k)^2$ . On déduit donc de la question précédente :

$$\mathbb{E}(T_N) = \frac{n}{p} \mathbb{E}(T_k^2) = \frac{n}{p} (\mathbb{V}(T_k) + \mathbb{E}(T_k)^2) = \frac{n}{p} (\sigma^2 + m^2) = \frac{n}{p} \sigma^2 + m$$

Comme  $\frac{n}{p} \sigma^2 \geq 0$ , on a  $\mathbb{E}(T_N) \geq m$ ; d'où le résultat paradoxal voulu: on attend en moyenne davantage que... le temps d'attente moyen !

7. On a égalité si, et seulement si, on a  $\sigma = 0$ .

Cela arrive si les horaires du bus sont fixes, c'est-à-dire si le bus passe à horaires fixes, exactement toutes les  $m$  minutes (pas de fluctuation autour de la moyenne!).

8. On a ici :

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{V}(T_1 + \dots + T_n) = \mathbb{V}(p) = 0 \\
 \text{càd: } &\text{cov}(T_1 + \dots + T_n, T_1 + \dots + T_n) = 0 \\
 \text{Donc: } &\sum_{i=1}^n \text{cov}(T_i, T_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \text{cov}(T_i, T_j) = 0 \quad \leftarrow \text{par bilinéarité de la covariance} \\
 \text{càd: } &\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(T_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \underbrace{\text{cov}(T_i, T_j)}_{=c} = 0 \\
 &\text{Donc: } n \sigma^2 + n(n-1) c = 0
 \end{aligned}$$

On a ainsi:  $\boxed{c = -\frac{\sigma^2}{n-1}}$ .

Ainsi, on a  $\boxed{c < 0}$ . Quoi de plus normal : la somme des  $T_k$  est constante, donc si le temps d'attente  $T_i$  augmente, alors fatalement les autres  $T_k$  diminuent, et réciproquement. Donc  $T_i$  et  $T_j$  ont des "variations" probabilistiquement opposées.

**Exercice 2** 1. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_n = \frac{1}{n^\alpha + 1}$ . La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle élément de  $l^2(\mathbb{N})$  ?

On a  $U_n^2 \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ , la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc un élément de  $l^2(\mathbb{N})$  si et seulement si  $2\alpha > 1$  c'est-à-dire  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

2. *Produit scalaire sur  $l^2(\mathbb{N})$ :*

(a) Démontrer  $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .

On raisonne par équivalence :

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow 0 \leq (a - b)^2$$

La dernière inégalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est également. On a bien  $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

(b) En déduire que si  $U, V \in l^2(\mathbb{N})$ ,  $\langle U | V \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n V_n$  est bien défini.

Soit  $U, V \in l^2(\mathbb{N})$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$0 \leq |U_n V_n| \leq \frac{1}{2}(U_n^2 + V_n^2).$$

La série de terme général  $\frac{1}{2}(U_n^2 + V_n^2)$  converge en tant que somme de séries convergentes.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que  $\sum U_n$  est absolument convergente donc convergente. La série de terme général  $U_n V_n$  admet donc une somme ce qui justifie la définition de  $\langle U | V \rangle$ .

(c) Montrer que  $l^2(\mathbb{N})$  est un espace vectoriel et que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $l^2(\mathbb{N})$ .

On commence par s'assurer que  $l^2(\mathbb{N})$  est non-vidé ce qui est le cas puisque la suite nulle appartient à  $l^2(\mathbb{N})$ . On se donne ensuite deux éléments  $U, V \in l^2(\mathbb{N})$  et un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$ , montrons que  $\lambda U + V$  est un élément de  $l^2(\mathbb{R})$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\lambda U_n + V_n)^2 = \lambda^2 U_n^2 + 2\lambda U_n V_n + V_n^2$ . Par hypothèse, les séries de terme général  $U_n^2$  et  $V_n^2$  convergent et on a montré à la question précédente que  $\sum U_n V_n$  convergeait. On en déduit que  $\sum (\lambda U_n + V_n)^2$  converge donc  $\lambda U + V \in l^2(\mathbb{R})$  et cet ensemble est bien un ssev de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Montrons que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est un produit scalaire:

- $\forall U, V \in l^2(\mathbb{R}), \langle U | V \rangle \in \mathbb{R}$ , c'est une forme.
- Symétrique:  $\forall U, V \in l^2(\mathbb{R}), \langle U | V \rangle = \langle V | U \rangle$  par commutativité sur  $\mathbb{R}$  donc la forme est symétrique.
- Bilinéaire: Soit  $U, V, W \in l^2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors la suite de terme général  $(\lambda U_n + V_n)W_n$  est convergente de somme égale à  $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} U_n W_n + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n W_n$  par propriétés des limites.

On a donc la linéarité par rapport à la première variable et, par symétrie, on obtient la linéarité par rapport à la deuxième variable.

- Positive : Soit  $U \in l^2(\mathbb{R})$ , alors  $\sum U_n^2$  est une série positive et convergente. La suite de ses sommes partielles est donc une suite positive et convergente, sa limite est, par conséquent positive. On a bien  $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n^2 \geq 0$ .
- Définie: Soit  $U \in l^2(\mathbb{R})$  telle que  $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n^2 = 0$ . La suite des ses sommes partielles est croissante (puisque  $U_n^2 \geq 0$ ), positive et de limite nulle. C'est donc la suite nulle. On a bien  $\langle U, U \rangle = 0 \Rightarrow U = 0$  d'où le caractère défini.

On a montré que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est donc un produit scalaire sur  $l^2(\mathbb{R})$ .

- (d) On pose  $S = \{U \in l^2(\mathbb{R}), \exists n_0, \forall n \geq n_0, U_n = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = 0\}$ . Montrer que  $S$  est un sous-espace vectoriel de  $l^2(\mathbb{N})$ .

La suite nulle appartient à  $S$ , l'ensemble est donc non-vidé. Soit  $U, V \in S$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors par définition de  $S$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, U_n = 0$  et il existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq m_0, V_n = 0$ . Pour tout  $n \geq \max(n_0, m_0)$ , on a alors  $\lambda U_n + V_n = 0$ . Par ailleurs, les deux séries  $\sum \lambda U_n$  et  $\sum V_n$  étant convergentes, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda U_n + V_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} U_n + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n = 0.$$

On a donc  $\lambda U + V \in S$  et  $S$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Il est clair qu'il est inclus dans  $l^2(\mathbb{R})$  puisque si  $U \in S$ , la série de terme général  $U_n^2$  admet un nombre fini de termes non nuls, elle est donc convergente.

- (e) Montrer que  $S^\perp = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$ .

Soit  $U \in S^\perp$ , posons

$$V_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a bien  $V \in S$  et, par suite,  $\langle U, V \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n V_n = U_0 - U_1 = 0$ . Ainsi  $U_0 = U_1$ . On fait ensuite le produit scalaire de  $U$  avec  $W$  définie par

$$W_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ -1 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

À nouveau, il est clair que  $W \in S$ , on a donc  $\langle U, W \rangle = 0$  ce qui impose  $U_1 = U_2$ . Par récurrence, on montre ainsi que  $U$  est une suite constante. Or, la série  $\sum U_n^2$  converge. Si  $U$  est constante, la série ne peut converger que si  $U = 0$ . On a montré  $S^\perp \subset \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$  et l'autre inclusion est évidente donc  $S^\perp = \{0\}$ .

- (f) En déduire que  $S \subsetneq (S^\perp)^\perp$ . On a  $(S^\perp)^\perp = \{0_{\mathbb{R}^2}\}^\perp = l^2(\mathbb{R})$  et  $S \subsetneq l^2(\mathbb{R})$ . En effet, on peut considérer la suite dont les deux premiers termes valent 1 et les suivants 0, c'est un élément de  $l^2(\mathbb{R})$  donc la somme n'est pas nulle, il n'appartient pas à  $S$ . On a donc une inclusion stricte.

3. Une famille orthonormée de  $E$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Soient  $u, v \in \mathbb{R}$ . Donner une expression de  $\cos(u)\cos(v)$  et de  $\sin(u)\sin(v)$  en fonction de  $\cos(u+v)$  et de  $\cos(u-v)$ .

Soit  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , On a

$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2\cos(u)\cos(v) \text{ et } \cos(u-v) - \cos(u+v) = 2\sin(u)\sin(v)$$

on en déduit que

$$\cos(u)\cos(v) = \frac{1}{2}\cos(u+v) + \frac{1}{2}\cos(u-v) \text{ et } \sin(u)\sin(v) = \frac{1}{2}\cos(u-v) - \frac{1}{2}\cos(u+v).$$

(b) Démontrer que  $\mathcal{F}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$  est une famille orthogonale dans  $E$ .

• Soit  $i \neq j$ , montrons que  $\langle f_i | f_j \rangle_E = 0$ .

On a

$$\begin{aligned} \langle f_i | f_j \rangle_E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(it) \cos(jt) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((i+j)t) + \cos((i-j)t) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\sin((i+j)t)}{i+j} + \frac{\sin((i-j)t)}{i-j} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

• Soit  $i \neq j$ , montrons que  $\langle g_i | g_j \rangle_E = 0$ . On a

$$\begin{aligned} \langle g_i | g_j \rangle_E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(it) \sin(jt) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((i-j)t) - \cos((i+j)t) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\sin((i-j)t)}{i-j} - \frac{\sin((i+j)t)}{i+j} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

• Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , montrons que  $\langle f_i | g_j \rangle_E = 0$ .

On sait que  $\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2\sin(u)\cos(v)$  donc  $\sin(u)\cos(v) = \frac{1}{2}\sin(u+v) + \frac{1}{2}\sin(u-v)$ .

On suppose tout d'abord  $i \neq j$ :

On a

$$\begin{aligned} \langle f_i | g_j \rangle_E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(it) \sin(jt) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((i+j)t) + \sin((j-i)t) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{\cos((i+j)t)}{i+j} + \frac{\cos((i-j)t)}{i-j} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si  $i = j$ , on a

$$\langle f_i | g_i \rangle_E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(it) \sin(it) dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2it) dt = \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{\cos(2it)}{2i} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

La famille est bien orthogonale.

(c) Calculer la norme des vecteurs de  $\mathcal{F}_n$ .

- $\|1\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1$ .
- Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors

$$\|f_i\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(it) dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2it) dt = \frac{1}{2}$$

- Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on remarque que  $\|f_i\|^2 + \|g_i\|^2 = 1$ , on en déduit que  $\|g_i\|^2 = \frac{1}{2}$ . Ainsi,  $\|f_i\| = \|g_i\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

(d) Montrer que  $F_n$  est de dimension finie et déterminer sa dimension.

$F_n$  est de dimension finie car il possède une famille génératrice finie. On a montré aux deux questions précédentes que la famille  $\mathcal{F}_n$  est orthogonale et ne possède aucun élément nul (puisque les normes ne sont pas nulles), on en déduit que la famille est libre et, par suite, que  $\dim(F_n) = 2n + 1$ .

4. Une projection orthogonale. Soit  $h \in E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $p_{F_n}(h)$  le projeté orthogonal de  $h$  sur  $F_n$ .

(a) Montrer qu'il existe un unique couple de suites  $(a_k(h))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_k(h))_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $b_0(h) = 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{F_n}(h) = \sum_{k=0}^n a_k(h) f_k + \sum_{k=1}^n b_k(h) g_k$$

Exprimer pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k(h)$  et  $b_k(h)$  à l'aide d'intégrales.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On sait que la famille

$$\left( f_0, \sqrt{2}f_1, \dots, \sqrt{2}f_n, \sqrt{2}g_1, \dots, \sqrt{2}g_n \right),$$

est une BON de  $F_n$ . D'après l'expression du projeté dans une BON, on a donc

$$P_{F_n}(h) = \langle f_0, h \rangle + \sum_{k=1}^n \langle h, \sqrt{2}f_k \rangle \sqrt{2}f_k + \sum_{k=1}^n \langle h, \sqrt{2}g_k \rangle \sqrt{2}g_k$$

En posant

- $a_0^{(n)}(h) = \langle f_0, h \rangle \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) dt$ ,
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$a_k^{(n)}(h) = 2\langle h, f_k \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) h(t) dt \text{ et } b_k^{(n)}(h) = 2\langle h, g_k \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) h(t) dt,$$

on a bien l'existence d'un  $(2n + 1)$ -uplet tel que

$$p_{F_n}(h) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)}(h) f_k + \sum_{k=1}^n b_k^{(n)}(h) g_k.$$

De plus, ce  $(2n + 1)$ -uplet est unique puisque la famille  $\mathcal{F}_n$  est libre.

Soit maintenant  $k \in \mathbb{N}^*$ . on remarque que pour tout  $n \geq k$ ,  $a_k^{(n)}(h)$  ne dépend pas de  $n$  (d'après l'expression intégrale qui ne dépend que de  $h$  et  $k$ ). Posons,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k(h) = a_k^{(k)}(h)$ ,  $b_0(h) = 0$  et  $b_k(h) = b_k^{(k)}$ . On a alors deux suites  $(a_k(h))_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(b_k(h))_{k \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{F_n}(h) = \sum_{k=0}^n a_k(h) f_k + \sum_{k=1}^n b_k(h) g_k.$$

Ces suites sont uniques puisque pour tout  $n$  fixé, leurs  $n+1$  premiers termes sont uniques.

**Si quelqu'un a une idée pour rédiger de manière plus digeste, je suis preneuse !!!**

(b) On note  $\|h\|_E = \sqrt{\langle h, h \rangle_E}$ . Démontrer que  $\|p_{F_n}(h)\|_E \leq \|h\|_E$ .

On sait que  $p_{F_n}(h)$  et  $h - p_{F_n}(h)$  sont orthogonaux (car ils appartiennent respectivement à l'image et au noyau d'un projecteur orthogonal), par le théorème de Pythagore, on a donc

$$\|h\|_E^2 = \|p_{F_n}(h)\|_E^2 + \|h - p_{F_n}(h)\|_E^2 \geq \|p_{F_n}(h)\|_E^2.$$

En prenant la racine carrée de l'inégalité, comme les quantités sont positives, on a donc  $\|p_{F_n}(h)\|_E \leq \|h\|_E$ .

(c) Justifier que les suites  $(a_k(h))_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(b_k(h))_{k \in \mathbb{N}}$  sont éléments de  $l^2(\mathbb{N})$  et que  $a_0(h)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(h)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(h)^2 \leq \|h\|_E^2$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question 4a, on a

$$p_{F_n}(h) = \sum_{k=0}^n a_k(h) f_k + \sum_{k=1}^n b_k(h) g_k,$$

et la famille  $\mathcal{F}_n$  est orthogonale. On en déduit que

$$\|p_{F_n}(h)\|_E^2 = \sum_{k=0}^n a_k(h)^2 \|f_k\|^2 + \sum_{k=1}^n b_k(h)^2 \|g_k\|^2.$$

On sait que  $\|f_0\|_E = 1$  et  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\|f_k\|_E = \|g_k\|_E = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on a donc

$$\|p_{F_n}(h)\|_E^2 = a_0(h)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n a_k(h)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_k(h)^2.$$

D'après la question précédente, on sait que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|p_{F_n}(h)\|_E \leq \|h\|_E$ , on a donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0(h)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k(h)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_k(h)^2 \leq \|h\|_E^2.$$

En particulier, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k(h)^2 \leq \|h\|_E^2 \text{ et } \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_k(h)^2 \leq \|h\|_E^2.$$

Les suites  $\left( \sum_{k=1}^n a_k(h)^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left( \sum_{k=1}^n b_k(h)^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donc croissantes et majorées, ce qui montre que les séries  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(h)^2$  et  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(h)^2$  convergent donc  $(a_k(h))_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(b_k(h))_{k \in \mathbb{N}}$  sont des éléments de  $l^2(\mathbb{N})$ .

En passant à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k(h)^2 \leq \|h\|_E^2 \text{ et } \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_k(h)^2 \leq \|h\|_E^2,$$

on obtient l'inégalité souhaitée

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer

$$\inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin(kt) \right)^2 dt \right)$$

Si on note  $H_n = \text{Vect}(g_1, \dots, g_n)$ , alors

$$\inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin(kt) \right)^2 dt \right) = \inf_{h \in H_n} 2\pi \|1 - h\|^2 = 2\pi d(f_0, H_n).$$

Comme  $H_n$  est un sous-espace vectoriel de  $F_n$ , il est de dimension finie, on a donc  $d(f_0, H_n) = \|f_0 - p_{H_n}(f_0)\|$ , où  $p_{H_n}$  désigne le projecteur orthogonal sur  $H_n$ . Or, on sait que  $f_0 \in H_n^\perp$ , on a donc  $p_{H_n}(f_0) = 0$  donc

$$\inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin(kt) \right)^2 dt \right) = 2\pi \|f_0\|^2 = 2\pi.$$

**Exercice 3** 1. Soit  $P$  et  $Q$  des polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors en utilisant la linéarité de la dérivée, on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi(P + \lambda Q) &= ((X^2 - 1)(P + \lambda Q))'' \\ &= ((X^2 - 1)P + \lambda(X^2 - 1)Q)'' \\ &= ((X^2 - 1)P)'' + \lambda((X^2 - 1)Q)'' \\ &= \Phi(P) + \lambda\Phi(Q). \end{aligned}$$

De plus si  $P$  est de degré au plus  $n$ ,  $(X^2 - 1)P$  est encore un polynôme, de degré au plus  $n + 2$  et donc  $\Phi(P)$  est bien un polynôme de degré au plus  $n$ , donc  $\Phi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . On a donc montré que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On a parfois l'impression que vous pensez que les éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$  sont de degré  $n$  ce qui est TRES faux ! Si vous dites que le degré de la dérivée vaut le degré " -1", c'est faux. Il faut préciser le cas où on dérive un polynôme constant.

2. (a) La base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est  $(1, X, \dots, X^n)$ . Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a

$$\Phi(X^k) = (X^{k+2} - X^k)'' = (k+2)(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

Cette écriture convient aussi pour  $k = 0$  ou  $k = 1$  puisque  $\Phi(1) = (X^2 - 1)'' = 2$  et  $\Phi(X) = (X^3 - X)'' = 6X$ .

La matrice de  $\Phi$  dans la base canonique s'écrit donc

$$Mat_{(1,X,\dots,X^n)}\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 12 & 0 & -12 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 20 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 30 & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (n+2)(n+1) \end{pmatrix}$$

Beaucoup d'erreurs de signe dans le report des coefficients dans la matrice, quel dommage !

- (b) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la matrice de  $\Phi - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$  dans la base canonique est triangulaire, et son déterminant s'obtient alors en effectuant le produit des termes diagonaux.

On en déduit que ce déterminant est nul si et seulement si  $\lambda$  est égal à un des termes diagonaux, à savoir  $\lambda_0 := 2$ ,  $\lambda_1 := 6$ ,  $\lambda_2 := 12$ , ...,  $\lambda_n := (n+2)(n+1)$  (c'est-à-dire pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\lambda_k = (k+2)(k+1)$  qui est bien une fonction strictement croissante sur les entiers naturels).

On a montré que, pour cette suite  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$  de réels distincts,  $\Phi - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$  est non bijective.

$\lambda_i \text{Id}$  est la matrice diagonale avec le même coefficient  $\lambda_i$  sur la diagonale (et pas  $\text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ )

- (c) Enfin, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la matrice de  $\Phi - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$  (qui est de taille  $n+1$ ) est triangulaire avec  $n$  termes diagonaux non nuls (et un terme nul, par construction des  $\lambda_i$ ), donc  $\Phi - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$  est de rang  $n$ .

La matrice est de taille  $n+1$  !!!

3. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- Comme  $\Phi - \lambda_k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$  est de rang  $n$  d'après la question précédente, on a, d'après la formule du rang:

$$\dim(\ker(\Phi - \lambda_k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - n = 1$$

Donc  $\ker(\Phi - \lambda_k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$  est une droite vectorielle.

Il existe donc  $\tilde{P}_k \in \ker(\Phi - \lambda_k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ ,  $\tilde{P}_k \neq 0$ , tel que  $\ker(\Phi - \lambda_k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \text{Vect}(\tilde{P}_k)$ .

Notons alors  $\alpha_k \neq 0$  le coefficient dominant de  $\tilde{P}_k$ . On pose  $P_k := \frac{1}{\alpha_k} \tilde{P}_k$ ; par construction, le polynôme  $P_k$  est unitaire et il engendre  $\ker(\Phi - \lambda_k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ .

Attention, de dimension 1 ne signifie pas du tout que le ssev ne contient qu'un élément !!!

- Démontrons l'unicité de  $P_k$ . Considérons à présent un polynôme  $Q_k \in \ker(\Phi - \lambda_k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$  unitaire; comme  $P_k$  et  $Q_k$  appartiennent à la même droite vectorielle et  $P_k \neq 0$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $Q_k = \alpha P_k$ . Or, les deux polynômes étant unitaires, on en déduit que  $\alpha = 1$ . Conclusion : il existe bien un unique polynôme unitaire dans  $\ker(\Phi - \lambda_k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ .

4. (a) Sur la matrice, on lit que pour tout polynôme unitaire  $P$  de degré  $d$ ,  $\Phi(P)$  a pour terme dominant  $(d+2)(d+1)X^d = \lambda_d X^d$ .

Or, pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\Phi(P_k) = \lambda_k P_k$ , donc le coefficient dominant de  $\Phi(P_k)$  est  $\lambda_k = (k+2)(k+1)$  puisque  $P_k$  est un polynôme unitaire.

D'après ce qui précède,  $P_k$  est de degré  $k$ , puisque la fonction  $k \mapsto \lambda_k$  est injective car strictement croissante. On peut aussi le refaire à la main :  $(k+2)(k+1) = (d+2)(d+1) \Leftrightarrow (d-k)(d+k+3) = 0 \Leftrightarrow d = k$ .

Très souvent mal traitée.

- (b) • Notons  $R = (X^2 - 1)P_k$ , de sorte que  $(X^2 - 1)Q_k = ((-X)^2 - 1)P_k(-X) = R(-X)$ . On a alors, en remarquant que  $R'' = \Phi(P_k)$ :

$$\Phi(Q_k) = (R(-X))'' = R''(-X) = \Phi(P_k)(-X) = \lambda_k P_k(-X) = \lambda_k Q_k.$$

Le polynôme  $Q_k$  est donc également dans  $\ker(\Phi - \lambda_k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ , qui est une droite vectorielle engendrée par le polynôme unitaire  $P_k$ , donc  $Q_k$  est un multiple de  $P_k$ .

- On a  $Q_k = P_k(-X)$  donc  $Q_k$  est de même degré que  $P_k$  et, puisque  $P_k$  est lui-même unitaire, le coefficient dominant de  $Q_k$  est égal à  $(-1)^k$ .  
On a donc  $Q_k = (-1)^k P_k$  donc  $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$ .

Là majorité est passée à côté. De manière générale pour un endomorphisme  $\Phi$  quelconque,  $\Phi(P)(-X) \neq \Phi(P(-X))$ . Pensez à la dérivation.

5. On a vu que  $\Phi(1) = 2$  et  $\Phi(X) = 6X$ , donc  $P_0 = 1$  et  $P_1 = X$  (ils sont bien unitaires). Étant donné la forme de la matrice, on va chercher  $P_2$  sous la forme  $X^2 + a$  et  $P_3$  sous la forme  $X^3 + bX$ , avec  $a$  et  $b$  des réels. On sait que  $\Phi(P_2) = 12P_2$  et  $\Phi(P_3) = 20P_3$  donc :

$$\Phi(X^2 + a) = 12X^2 - 2 + 2a = 12(X^2 + a) \iff -2 + 2a = 12a \iff a = -\frac{1}{5}$$

$$\Phi(X^3 + bX) = 20X^3 - 6X + 6bX = 20(X^3 + bX) \iff -6 + 6b = 20b \iff b = -\frac{3}{7}$$

Donc  $P_2 = X^2 - \frac{1}{5}$  et  $P_3 = X^3 - \frac{3}{7}X$ .

6. La fonction proposée est bien à valeurs réelles, puisqu'on intègre des fonctions continues sur un segment.

- *symétrie* : quels que soient les polynômes  $P$  et  $Q$ , on a visiblement  $(P | Q) = (Q | P)$ .
- *bilinéarité* : puisque l'expression est symétrique, il suffit de montrer la linéarité à gauche (par exemple). Soient  $P, \tilde{P}, Q$  des polynômes et  $\lambda$  un réel,

$$(P + \lambda \tilde{P} | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)dt + \lambda \int_{-1}^1 \tilde{P}(t)Q(t)(1-t^2)dt = (P | Q) + \lambda(\tilde{P} | Q)$$

par linéarité de l'intégrale, donc  $(\cdot | \cdot)$  est linéaire à gauche, donc bilinéaire par symétrie.

- *défini positif* : si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $(P | P) = \int_{-1}^1 P^2(t)(1-t^2)dt$  est positif par positivité de l'intégrale, puisque les bornes sont dans le bon ordre et  $\forall t \in [-1, 1], P^2(t)(1-t^2) \geq 0$ .  
De plus si  $(P | P) = 0$ , alors  $\int_{-1}^1 P^2(t)(1-t^2)dt = 0$ . Par stricte positivité de l'intégrale, comme  $t \mapsto P^2(t)(1-t^2)$  est positive et continue sur  $[-1, 1]$ , cela implique que  $P^2(t)(1-t^2) = 0$  pour tout  $t \in [-1, 1]$ , donc en particulier  $P(t) = 0$  sur  $] -1, 1[$ . Or  $P$  est un polynôme, donc puisqu'il admet une infinité de racines, c'est forcément le polynôme nul.
- *conclusion* : l'application  $(\cdot | \cdot)$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est donc un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On perd des points si on invoque la stricte positivité de l'intégrale sans préciser que la fonction est continue ou quand on montre la linéarité à droite (ou à gauche) et qu'on dit juste "donc bilinéaire" sans préciser que c'est grâce à la symétrie. Vous avez le droit d'invoquer la linéarité de l'intégrale mais en écrivant explicitement ce qu'elle vous donne comme égalité (ce qui montre alors que vous savez ce qu'il faut montrer pour avoir la linéarité).

7. Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ . Alors en procédant à deux IPP successives en intégrant  $u(t) = ((X^2 - 1)P)''(t)$  et en dérivant  $v(t) = Q(t)(1 - t^2) = ((1 - X^2)Q)(t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
(\Phi(P) | Q) &= \int_{-1}^1 ((X^2 - 1)P)''(t)Q(t)(1 - t^2)dt \\
&= \underbrace{[(X^2 - 1)P]'((1 - X^2)Q)}_{=0} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((X^2 - 1)P)'(t)((1 - X^2)Q)'(t)dt \\
&= - \underbrace{[(X^2 - 1)P)((1 - X^2)Q)']_{-1}^1}_{=0} + \int_{-1}^1 ((X^2 - 1)P)(t)((1 - X^2)Q)''(t)dt \\
&= \int_{-1}^1 ((1 - X^2)P)(t)((X^2 - 1)Q)''(t)dt \\
&= \int_{-1}^1 (1 - t^2)P(t)\Phi(Q)(t)dt = (P | \Phi(Q)).
\end{aligned}$$

Pour passer de la 3e à la 4e ligne, on a multiplié  $X^2 - 1$  et  $1 - X^2$  par  $-1$ , et utilisé la linéarité de la dérivée.

8. Comme  $\deg P_k = k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est échelonnée et de cardinal  $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$  : on sait donc déjà que c'est base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Montrons que c'est une base orthogonale : si  $i \neq j$ ,

$$\lambda_i(P_i | P_j) = (\Phi(P_i) | P_j) = (P_i | \Phi(P_j)) = \lambda_j(P_i | P_j)$$

mais  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ , et donc on a nécessairement  $(P_i | P_j) = 0$ .

La famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est donc une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

9. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors vérifions que  $\text{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1}) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$  : la famille  $(P_0, \dots, P_{k-1})$  est échelonnée en degré (donc libre), et chaque polynôme est de degré inférieur à  $k - 1$ . On a donc  $\text{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1}) \subset \mathbb{R}_{k-1}[X]$  et l'égalité des dimensions donne l'égalité entre ces sous-espaces vectoriels.

Comme  $P_k$  est orthogonal à chacun des  $P_i$  pour  $i \neq k$ , il appartient bien à l'orthogonal de  $\text{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1})$ , donc  $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ .

Une famille orthogonale n'est libre que si elle ne contient aucun vecteur nul