

Variables aléatoires finies et lois usuelles

1 Variables aléatoires

Définition 1. On considère un ensemble fini Ω et une loi de probabilité p sur Ω . Une variable aléatoire réelle X sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1. On lance deux dés équilibrés à six faces, X peut valoir la somme des deux dés, la plus grande valeur obtenue, la plus petite, la différence entre les deux etc

L'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ des valeurs prises par X est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à celui de Ω . **Notations:** Soit A un ensemble de $\mathbb{R}$. On note $(X \in A)$ l'évènement $X^{-1}(A)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, pour alléger les notations, on note

- $(X = a) = X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = a\}$.
- $(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq a\}$
- $(a < X \leq b) = X^{-1}(]a, b]) = \{\omega \in \Omega, a < X(\omega) \leq b\}$.

Exemples 2.

1. Si X est la somme des dés et $A = \{3, 4\}$, $(X \in A)$ est l'ensemble des évènements dont l'image appartient à A . Autrement dit, l'ensemble des tirages qui réalisent "la somme des deux dés vaut 3 ou 4".

Si $A = \{1\}$, $X \in A$ (ou encore $X = 1$) est l'évènement impossible.

2. On lance trois fois une pièce équilibrée, on obtient 2 euros si on tombe sur pile, -1 sinon, on note X le gain. On a $X(\Omega) = \{-3, 0, 3, 6\}$.

Définition 2. Soit X une variable aléatoire sur Ω , $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. On définit une probabilité $\mathbb{P}_X$ associée à X (dont l'univers est $X(\Omega)$), par la donnée des réels x_i et des probabilités $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, pour $1 \leq i \leq n$.

En effet, si $S \subset X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}_X(Z) = \mathbb{P}(X \in S) = \sum_{x \in S} \mathbb{P}(x)$. On a alors $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(\{x\}) = 1$.

Exemples 3.

1. Dans une urne, on dispose de 3 boules blanches, deux boules bleues et une boule noire. On tire une boule de cette urne au hasard. On perd 1 euro quand on tire une boule bleue, on ne gagne rien ni ne perd rien quand on tire une blanche, on gagne 2 euros quand on tire la boule noire. Déterminer la loi de X
2. On lance deux dés équilibrés à six faces l'un après l'autre. On gagne 2 euros si on tire un six, on perd un euro si on tire un 3 ou un 5 et on gagne 1 euro sinon. On note X la loi de probabilité égale au total des gains. Déterminer la loi de X .

Remarque. Les x_i correspondent aux différentes valeurs prises par X lors des différentes issues. Dans les deux cas, on a la somme des $\mathbb{P}(X = x_i)$ qui vaut 1.

Définition 3. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω telles que

- $X(\Omega) = Y(\Omega)$
- $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

On dit alors que X et Y ont même loi de probabilité et on note $X \sim Y$.

Exemple 4. On lance un dé équilibré à six faces. On note X le résultat obtenu et Y le résultat sur la face opposée. Alors X et Y ont même loi de probabilité

Définition 4. Soit $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ alors on note $f(X)$ la variable aléatoire : $f \circ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 5. On lance 3 fois un dé. On note X le nb de fois où on a obtenu un six. À chaque six, on gagne 2 euros. On note $f : x \mapsto 2x$, $f(X)$ est la variable aléatoire représentant le gain.

Proposition 1.

Si $X \sim Y$ et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Définition 5. On appelle variable aléatoire indicatrice d'un évènement A la variable aléatoire valant 1 si A est réalisé, 0 sinon.

1.1 Espérance

Définition 6. Soit X une variable aléatoire réelle avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, on appelle espérance de X le réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Concrètement, c'est la moyenne des valeurs de la variable aléatoire X , pondérées par leurs probabilités de réalisation.

Exemples 6.

1. Dans l'exemple du jeu avec les deux dés, le jeu est-il favorable au joueur?
2. Prenons maintenant le cas d'un dé équilibré que l'on lance. On note X le carré de la valeur obtenue. La variable aléatoire X prend donc comme valeurs les carrés des entiers de 1 à 6 et chacune de ces valeurs est obtenue avec une probabilité de $\frac{1}{6}$. À quoi correspond l'espérance?

Question: Que vaut l'espérance d'une variable aléatoire constante?

Exercice 1. Soit X une var à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$.

Définition 7. Si $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que X est une variable aléatoire centrée.

Remarque: Dans le cadre d'un jeu, si X représente le gain d'un joueur, une espérance positive correspond à un jeu favorable au joueur, une espérance négative un jeu défavorable au joueur.

Proposition 2.

Si X est une variable aléatoire, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire centrée.

Proposition 3 (Propriétés de l'espérance).

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$. Alors :

- $\mathbb{E}(u(X)) = \sum_{i=1}^n u(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$ (théorème de transfert);
- $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ (linéarité);
- Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$;
- Si $X \geq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$;
- $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

Exercice 2. Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires. Un joueur tire 5 boules successivement et sans remise. Soit B la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées et N égale au nombre de boules noires tirées.

1. Déterminer la loi de B puis calculer $\mathbb{E}(B)$.
2. Trouver une relation liant B et N . En déduire la loi de N et son espérance.

1.2 Variance

Définition 8. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle variance de X le réel positif :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

On appelle écart-type de X le nombre positif :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Proposition 4.

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, X une variable aléatoire réelles alors :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X).$$

Question: Que dire d'une variable aléatoire de variance nulle?

Proposition 5 (Formule de Huygens). Soit X une variable aléatoire, alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Exemple 7. Calculer la variance du jeu avec les dés.

2 Lois usuelles

2.1 Loi uniforme

Définition 9. Soit X une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, les x_i étant supposés distincts. On dit que X suit la loi uniforme si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

Autrement dit, chacune des valeurs prises par X se réalise avec la même probabilité.

Proposition 6.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

L'espérance correspond donc à la moyenne des x_i .

Dans le cas où $x_i = i$, on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

2.2 Loi de Bernoulli.

Définition 10. On considère une expérience aléatoire à deux issues :

- S appelé succès avec une probabilité p ,
- et E ou $\bar{S}$ appelé échec avec une probabilité $q = 1 - p$. Cette situation constitue une épreuve de Bernoulli.

L'exemple classique est le lancer d'une pièce. Si on considère que le succès est "pile", il n'y a qu'une autre alternative qui est "face". Si la pièce est équilibrée, alors $p = \frac{1}{2} = q$.

Définition 11. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si S est réalisé et 0 sinon. La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli. On dit alors que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X = 1)$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Ici, on traduit la notion de succès ou échec avec la loi binaire: 0 ou 1.

Exemples 8.

On reprend l'exemple de la pièce, on considère que l'on lance une pièce qui tombe sur face avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. On note X la variable aléatoire valant 1 lorsque l'on obtient face, 0 sinon.

Si on se place dans la situation d'un contrôle qualité, on a alors deux cas possibles : pièce défectueuse ou non. Si on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la pièce contrôlée est bonne, 0 sinon et que l'on considère que les pièces sont défectueuses avec une probabilité de $\frac{1}{10}$, quelle loi suit X ?

On lance un dé équilibré à six faces, on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un six, 0 sinon. Quelle loi suit X ?

Propriété:

Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p .

- L'espérance de X est $\mathbb{E}(X) = p$.
- La variance de X est : $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.
- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

2.3 Loi binomiale

Définition 12. On considère une expérience aléatoire à deux issues S ou $\bar{S}$, de probabilités respectives p et q . On répète n fois de suite cette expérience de façons indépendantes. On a alors un schéma de Bernoulli.

Définition 13. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où S est réalisée lors de ces n expériences. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Concrètement : on est dans le cas où on répète une expérience de Bernoulli (deux issues possibles: succès ou échec) et on compte le nombre de fois où on a obtenu un succès.

Exemple 9. On lance trois fois la pièce déséquilibrée qui vaut face avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et on note X le nombre de fois où on obtient face. Alors X suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$.

Proposition 7.

Soit n un entier naturel non nul, pour tout entier naturel k :

- Si $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
- Si $0 \leq k \leq n-1$, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (Formule de Pascal)

Théorème 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un réel de l'intervalle $[0; 1]$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Remarque: Si on considère A_k l'évènement "obtenir exactement k succès au cours des n répétitions. Alors la famille $(A_k)_{k \in [0, n]}$ est un système complet d'évènements (les évènements sont incompatibles et leur réunion est égal à l'univers tout entier car tous les cas sont couverts). Que vaut $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$?

Théorème 9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un réel de l'intervalle $[0; 1]$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .

- l'espérance de X est : $\mathbb{E}(X) = np$,
- la variance de X est : $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$,
- l'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

3 Couple de variables aléatoires

3.1 Loi conjointe

Définition 14. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$, alors on définit une probabilité sur Ω appelée loi conjointe par la donnée $\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, m]$

$$p_{ij} = \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

Exemples 10.

1. On lance deux dés équilibrés, on note X le nb de 6 obtenus et Y la somme des deux dés.

2. Soit n un entier naturel non nul.

On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(A), P)$ deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, p_{ij} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

Déterminer la valeur du réel α .

Proposition 10.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j=1}^m p_{ij},$$

et

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i=1}^n p_{ij},$$

Autrement dit, on peut retrouver les lois de X et Y à partir des lois conjointes.

Définition 15. Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires. Les lois de X et Y sont appelées lois marginales de Z .

Exemple 11. On reprend notre exemple précédent, on peut déterminer les lois de X et Y en calculant la somme.

Proposition 11.

Soit X, Y , deux variables aléatoires réelles, on a

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Définition 16. Soit X et Y deux variables aléatoires finies. On appelle covariance de X et Y , notée $\text{cov}(X, Y)$ le réel :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

On dit que deux variables sont non corrélées si leur covariance est nulle.

Ce réel mesure les variations simultanées des variables aléatoires. Plus précisément, si $\text{cov}(X, Y) \geq 0$, elles sont positivement corrélées et évolue dans la même direction. Dans le cas contraire, quand l'une augmente, l'autre diminue.

Remarque. On a $\text{cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.

Proposition 12.

- Pour toute variable aléatoire X, Y , $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.
- cov est linéaire par rapport à chacune des ses variables.

Remarque. cov est une forme bilinéaire, symétrique et positive.

Proposition 13.

On a $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$.

Exercice 3. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Montrer que $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}$.

Théorème 14 (thm de transfert généralisé). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, X et Y deux variables aléatoires réelles, alors

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq m} f(x_i, y_j) \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

3.2 Variables aléatoires indépendantes

Définition 17. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$. On dit que les lois de X et de Y sont indépendantes si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}(Y = y_j).$$

Exemples 12.

1. On tire simultanément deux dés A et B distincts. On note X , respectivement Y , la variable aléatoire égale au numéro obtenu après le lancer du dé A , respectivement B .
2. On remarque que les variables aléatoires de l'exemple précédent ne sont pas indépendantes.
3. N personnes, numérotées de 1 à N , choisissent un opérateur téléphonique parmi les 3 existants (numérotés 1 à 3). On note X_i la variable aléatoire correspondant aux nombres de personnes ayant choisi l'opérateur i . Les variables aléatoires sont-elles indépendantes?

Proposition 15.

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Proposition 16.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Remarque. Si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle.



La réciproque est fausse !

Exemple 13. soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim Y \sim \mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0, 1[$. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer la loi conjointe de U et V et leur covariance. Sont-elles indépendantes ?

Définition 18. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur un même univers Ω . Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont dites (*mutuellement*) indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Elles sont dites deux à deux indépendantes si $\forall (i, h) \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, X_i$ et X_j sont indépendantes.

Remarque. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors, pour tout $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$, les événements $(\{X_i \in A_i\})_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 17 (Somme de variables aléatoires de Bernoulli).

Soient $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes. Alors :

$$X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Proposition 18 (variance de variables aléatoires indépendantes). Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes alors

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n).$$

Remarque. On a déjà utilisé ceci pour montrer la variance d'une va suivant une loi binomiale.

Proposition 19 (Lemme des coalitions).

Soit, $0 < m < n$ des entiers et $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E_n$ des variables aléatoires indépendantes.

Soit $f : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ et $g : E_{m+1} \times \dots \times E_n \rightarrow G$ deux applications.

Alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Exemple 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on lance n fois une pièce de manière indépendante et on note X_i le résultat du lancer i (1 si pile, 0 sinon). On note $Y = X_1 + \dots + X_n$. Y et X_1 sont-elles indépendantes?

4 Inégalités utiles

4.1 Inégalités de Markov

Théorème 20.

Soit X une variable aléatoire finie à valeurs positives. Pour tout réel strictement positif a , on a

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Exemple 15. Un boulanger fabrique une certaine quantité de pâtes à pain chaque jour. On suppose que le nombre X de pains fabriqués chaque jour suit une loi d'espérance 500. Que peut-on dire de la probabilité pour qu'un jour donné, le boulanger ait fabriqué au moins 600 pains? 400 pains?

Remarque. Cette inégalité n'a d'intérêt que pour des valeurs du réel a supérieures à $\mathbb{E}(X)$.

4.2 Inégalité de Bienaymé-tchébychev

Théorème 21.

Soit X une variable aléatoire finie. Pour tout réel a strictement positif, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

Exemples 16.

1. On reprend l'exemple du boulanger, sachant que l'on a aussi un écart-type à 20. Que peut-on dire de la probabilité qu'il ait fabriqué un nb de pains compris entre 400 et 600? entre 450 et 550?

2. On joue avec un dé non truqué à six faces. Combien faut-il effectuer de lancers pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 1 diffèrera de $1/6$ d'au plus $1/100$?

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2 . Montrer que

$$\mathbb{P}(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$