

## Produit scalaire

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels considérés sont sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

### 1 Produits scalaires

**Définition 1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev. On appelle **produit scalaire** (p.s.) sur  $E$  une forme  $\Phi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui est :

1. **symétrique**:  $\forall x, y \in E, \Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ ;
2. **bilinéaire**: (c-à-d linéaire vis-à-vis de chacune de ses variables).  
 $\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall y \in E,$

$$\Phi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y)$$

3. **positive**:  $\forall x \in E, \Phi(x, x) \geq 0$
4. **définie** :  $\Phi(x, x) = 0$  uniquement si  $x = 0_E$ .

Dans ce cas, on notera  $\Phi(x, y) = (x | y)$ , ou parfois  $(x, y)$ ,  $\langle x | y \rangle$ ,  $\langle x, y \rangle$  ou encore  $x \cdot y$ .

**Définition 2.** • Un  $\mathbb{R}$ -ev  $E$  muni d'un p.s.  $(\cdot | \cdot)$  est appelé **espace préhilbertien réel**.

- Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé **espace euclidien**.

*Exemples 1.*

1. **Sur**  $E = \mathbb{R}^n$ :

Si  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , alors le p.s. usuel de  $x$  et  $y$  est:

$$(x | y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y$$

2. **Sur**  $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ , où  $a < b$

Si  $f, g \in \mathbb{E}$ , le p.s. usuel entre  $f$  et  $g$  est:

$$(f | g) := \int_a^b f(t)g(t) dt$$

3. **Sur**  $E = \mathbb{R}[X]$ :

Soit  $a < b$ . Si  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , le p.s. entre  $P$  et  $Q$  est:

$$(P | Q) := \int_a^b P(t)Q(t) dt = \int_a^b PQ$$

Dans la suite,  $(E, (\cdot | \cdot))$  désigne un espace préhilbertien réel.

**Exercice 1.** Pour tout  $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$ , on pose  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\top B)$ .

Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

## 2 Normes euclidiennes

**Définition 3.** Pour tout  $x \in E$ , on pose

$$\|x\| := \sqrt{(x | x)}$$

qui est bien défini, car  $(x | x) \geq 0$ .

L'application  $\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$  est ce que l'on appelle la **norme associée au p.s.**  $(\cdot | \cdot)$ .

On dit alors que c'est une norme euclidienne.

*Exemples 2.*

1. La norme usuelle sur  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

2. La norme usuelle sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ :

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2}$$

### Proposition 1.

Pour tout  $x \in E$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$

**Proposition 2** (Produit scalaire et norme). Pour tous  $x, y \in E$ ,

1.  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \quad (E_1)$
2.  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x | y) + \|y\|^2 \quad (E_2)$
3.  $(x | y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (\text{Formule de polarisation})$

**Remarque.** Une conséquence du 3. est qu'un p.s. est entièrement caractérisé par sa norme.

**Théorème 3** (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tous  $x, y \in E$ ,

$$|(x | y)| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité ssi  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

Exemples 3.

1. Sur  $\mathbb{R}^n$ , si  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , cela donne:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

2. Montrer que pour tout réel  $(x_1, \dots, x_n)$ , on a  $\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

3. Sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ , pour tous  $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ :

$$\left| \int_a^b f \cdot g \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}$$

4. Montrer que pour tout  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ ,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}.$$

**Exercice 2.** Soit  $M_n(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire:  $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}), \langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\top B)$ .  
Montrer que pour tout  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{Tr}(A)^2 \leq n \text{Tr}(A^\top A)$ .

**Théorème 4** (Inégalité triangulaire). Pour tout  $x, y \in E$ ,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité ssi  $x$  et  $y$  sont "positivement liés", c-à-d s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que  $x = \lambda y$ , ou  $y = \lambda x$ .

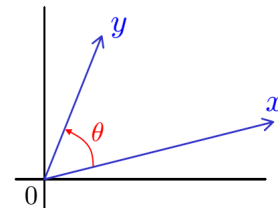
Exemple 4. : Un cas particulier: le p.s. usuel sur  $\mathbb{R}^2$

Soit  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  et  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . On rappelle que  $(x | y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ .

On a

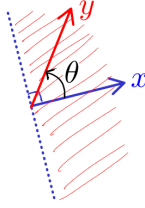
$$(x | y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta)$$

où  $\theta$  désigne l'angle entre  $x$  et  $y$ .



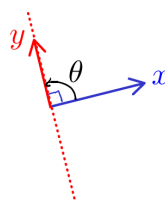
**Interprétation du signe de  $(x | y)$ :** ce signe dépend de celui de  $\cos(\theta)$  !

Si  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



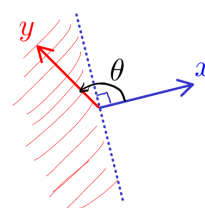
$$(x | y) > 0$$

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2}$



$$(x | y) = 0$$

Si  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$



$$(x | y) < 0$$

### 3 Familles orthogonales, orthonormales

**Définition 4.** Soit  $x, y, e_1, \dots, e_p \in E$ . On dit que:

1.  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** si  $(x | y) = 0$ .
2. La famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est **orthogonale** si pour tous  $i \neq j$  de  $\llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $(e_i | e_j) = 0$ .
3. Le vecteur  $x$  est **unitaire** si  $\|x\| = 1$ .
4. La famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est **orthonormale** (ou **orthonormée**) si elle est orthogonale et composée de vecteurs unitaires.
5. La famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est une **base orthonormée** s'il s'agit à la fois d'une base de  $E$ , et d'une famille orthonormée. On note une telle famille BON en abrégé (abréviation officielle).

*Exemple 5.* La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une BON pour le produit scalaire usuel.

**Remarque.** Toutes ces définitions dépendent du produit scalaire !!

*Exemple 6.*  $\varphi : \begin{cases} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto xx' + 2x'y + 2xy' + 5yy' \end{cases}$ . C'est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  pour lequel la base canonique n'est pas orthogonale.

#### **Théorème 5.**

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

**Remarque.** Une famille orthonormée est une famille libre.

**Théorème 6** (Théorème de Pythagore). Si une famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|e_i\|^2$$

**Proposition 7.**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une BON de  $E$ . Soit  $x, y \in E$ , de coordonnées  $Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et

$$Mat_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B}.$$

1.  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $x_i = (x | e_i)$ , et donc  $x = (x | e_1)e_1 + \dots + (x | e_n)e_n$  Les coordonnées de  $x$  dans une BON sont donc  $((x | e_1), \dots, (x | e_n))$ .

$$2. (x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$3. ||x||^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

**Remarque.** Autrement dit, lorsque l'on représente les vecteurs de  $E$  par leurs vecteurs coordonnées dans une BON, alors tout se ramène à manipuler des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , muni du p.s. USUEL.

On admet, pour le moment, que tout sev de dimension finie admet une BON.

## 4 Orthogonal d'une partie de $E$ / d'un sev de $E$ de dimension finie

**Définition 5.** Soit  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On dit que  $A$  est orthogonal à  $B$  ou que  $A$  et  $B$  sont orthogonaux, et on note  $A \perp B$  si

$$\forall (x, y) \in A \times B, \langle x, y \rangle = 0.$$

**Remarque.** Si  $A$  est orthogonal à  $B$ ,  $B$  est orthogonal à  $A$ .

*Exemple 7.* On considère  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique,  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  sa base canonique. On pose  $A = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3)$  et  $B = \text{Vect}(e_5)$ . Alors  $A$  et  $B$  sont orthogonaux.

**Définition 6.** Soit  $A \subset E$ . On note  $A^\perp$  l'ensemble des vecteurs de  $E$  qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de  $A$ :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, (x | a) = 0\}$$

L'ensemble  $A^\perp$  est appelé **orthogonal de  $A$** .

**Remarque.** Si  $A \perp B$ , alors  $A \subset B^\perp$  (et  $B \subset A^\perp$ ).

**Théorème 8** (Orthogonal d'une partie  $A \subset E$ ).

Soit  $A \subset E$ , alors  $A^\perp$  est un sev de  $E$ .

**Proposition 9.**

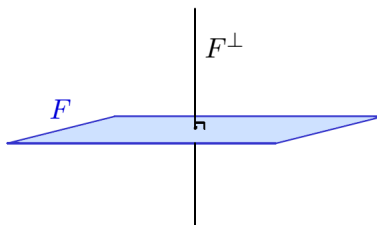
Soit  $F$  un ssev de  $E$  de dimension finie,  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$ . Alors une partie  $A$  est orthogonale à  $F$  si et seulement si  $\forall a \in A, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle a, e_i \rangle = 0$ .

**Proposition 10.**

Soit  $F$  un sev **de dimension finie** (ce qui n'implique pas que le sev  $F^\perp$  soit lui-même de dimension finie).

Alors,  $F^\perp$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ . Autrement dit :

$$E = F \oplus F^\perp$$



**Remarque.** Si  $F$  n'est pas de dimension finie, on n'a pas forcément  $F \oplus F^\perp = E$  (cf td ex 19)

**Proposition 11.**

Si  $F$  est de dimension finie,  $F^\perp$  (qui n'est pas forcément de dimension finie) est l'**unique** sev de  $E$  qui est

1. orthogonal à  $F$  (au sens où ses vecteurs sont orthogonaux à ceux de  $F$ );
2. un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

On peut donc dire "**LE**" supplémentaire orthogonal de  $F$ .

**Proposition 12.**

Soit  $F$  de dimension finie, on a :

$$(F^\perp)^\perp = F$$

*Exemple 8.* Soit  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$ . On suppose  $\mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^2 P(j)Q(j)$ . Déterminer  $F^\perp$ .

**Théorème 13.**

on suppose que  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Si  $F$  un sev de  $E$  et que

- $(f_1, \dots, f_p)$  est une BON de  $F$  ;
- $(h_1, \dots, h_q)$  est une BON de  $F^\perp$  (avec  $q = n - p$ , nécessairement) ;

alors la famille  $\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_p, h_1, \dots, h_q)$  est une BON de  $E$ .

2. Réciproquement, si  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  est une BON de  $E$  et  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors si on pose :

$$\begin{cases} F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \\ G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) \end{cases}, \text{ on a } E = F \oplus G, \text{ et } G = F^\perp.$$

**Définition 7.** Supposons que  $E$  est de dimension finie. Si  $F$  est un hyperplan, alors  $F^\perp$  est une droite vectorielle, dirigée par un vecteur  $u$ . Ce vecteur est appelé vecteur normal à l'hyperplan  $F$ .

*Exemple 9.* Déterminer un vecteur normal à  $F$  où  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - 2z + 3t = 0\}$ .

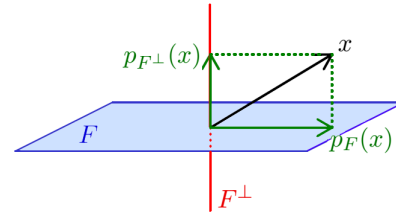
## 5 Projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on fixe  $F$  un sev de  $E$  **de dimension finie**. On rappelle que dans ce cas, on a  $F \oplus F^\perp = E$ , même si  $E$  et  $F^\perp$  peuvent eux ne pas être de dimension finie.

**Définition 8.** Le projecteur orthogonal sur  $F$  est le projecteur  $p_F$  sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

Symétriquement, dans ce cours,  $p_{F^\perp}$  désigne le projecteur sur  $F^\perp$  parallèlement à  $F$ .

Par définition, pour tout  $x \in E$ ,  $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$ .

**Théorème 14.**

Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une BON de  $F$ , alors pour tout  $x \in E$  :

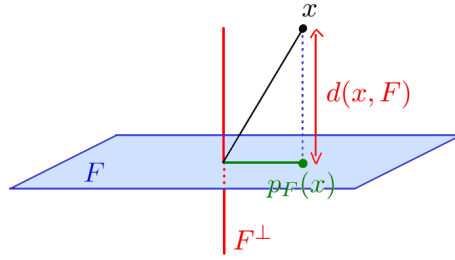
$$p_F(x) = (x | e_1)e_1 + \dots + (x | e_p)e_p$$

**Théorème 15.**

Soit  $F$  un sev de dimension finie. Soit  $x \in E$ .

L'ensemble  $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$  des distances entre  $x$  et les vecteurs de  $F$ , admet un minimum, atteint (uniquement) pour  $y = p_F(x)$ .

**Définition 9.** Ce minimum  $\|x - p_F(x)\| = \min_{y \in F} (\|x - y\|)$  est appelé la **distance entre  $x$  et  $F$** , et est noté  $d(x, F)$ .



**Remarque.**  $d(x, F)$  vaut donc  $\|p_{F^\perp}(x)\|$ , puisque  $p_{F^\perp}(x) = x - p_F(x)$ . Si  $F^\perp$  est de dimension finie, inférieure à celle de  $F$ , il est parfois plus rapide de déterminer  $p_{F^\perp}(x)$

Exemples 10.

1. On travaille dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel. Déterminer la distance du vecteur  $u = (1, 1, 1)$  au ssev  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$ .

2. Soit  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$  muni du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^2 P(j)Q(j)$ . Déterminer la distance de  $A = 2X^2 + X + 1$  à  $F$ .

## 6 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ .

**Objectif:** construire une famille **orthonormée**  $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$  telle que:

$$\begin{cases} \text{Vect}(\hat{e}_1) &= \text{Vect}(e_1) \\ \text{Vect}(\hat{e}_1, \hat{e}_2) &= \text{Vect}(e_1, e_2) \\ \text{Vect}(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) &= \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \\ &\vdots \\ \text{Vect}(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \end{cases}$$

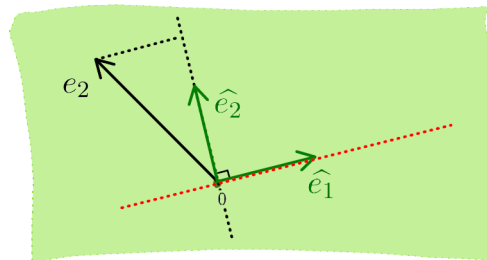
### 6.1 Idée de la construction : traiter les $e_1, \dots, e_p$ un par un, de gauche à droite

- Normalisation de  $e_1$ , de sorte que  $\text{Vect}(\hat{e}_1) = \text{Vect}(e_1)$ .

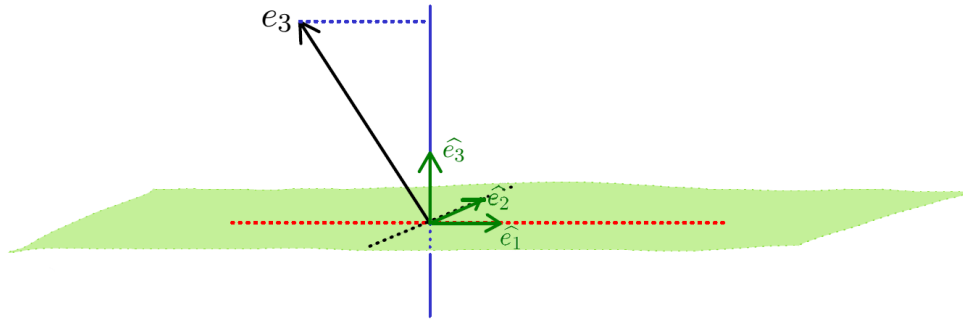


- "Redressement" et normalisation de  $e_2$ , de sorte que :

$$\begin{cases} \hat{e}_2 \perp \hat{e}_1 \\ \|\hat{e}_2\| = 1 \\ \text{Vect}(\hat{e}_1, \hat{e}_2) = \text{Vect}(e_1, e_2) \end{cases}$$



- Idem pour  $e_3$ : 
$$\begin{cases} \hat{e}_3 \perp \hat{e}_1 \text{ et } \hat{e}_3 \perp \hat{e}_2 \\ \|\hat{e}_3\| = 1 \\ \text{Vect}(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \end{cases}$$



Résultat des transformations :



## 6.2 Comment calculer les $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p$ ?

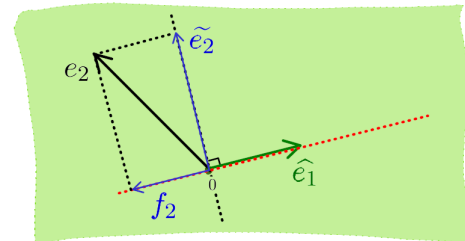
- Pour  $\hat{e}_1$  :  $\hat{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ , de sorte que  $\|\hat{e}_1\| = \frac{\|e_1\|}{\|e_1\|} = 1$ .



- Pour  $\hat{e}_2$  : un bon candidat pour être orthogonal à  $\hat{e}_1$  :

$$\tilde{e}_2 := e_2 - f_2$$

où  $f_2$  est le vecteur représenté ci-contre.



On remarque que  $f_2$  est le projeté orthogonal de  $e_2$  sur  $\text{Vect}(e_1)$ . Comme  $\hat{e}_1$  est une BON de  $\text{Vect}(e_1)$ , on a  $f_2 = (e_2 | \hat{e}_1) \hat{e}_1$  d'après l'expression du projeté orthogonal; donc

$$\tilde{e}_2 = e_2 - \underbrace{(e_2 | \hat{e}_1) \hat{e}_1}_{\substack{\text{projeté orthogonal de } e_2 \\ \text{sur } \text{Vect}(\hat{e}_1)}}$$

Il est clair que  $\langle \tilde{e}_2, \hat{e}_1 \rangle = 0$  car pour tout  $x \in E$ ,  $x - p(x)$  appartient à  $F^\perp$  si  $p$  est le projeté orthogonal sur  $F$ .

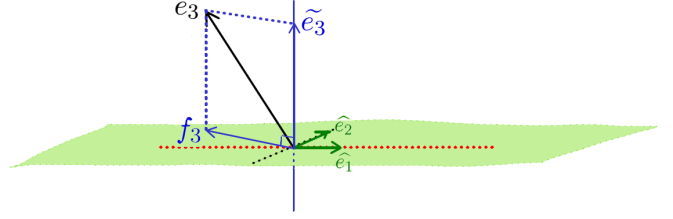
Il ne reste plus qu'à normaliser  $\tilde{e}_2$ :  $\hat{e}_2 := \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|}$

On remarque que  $\tilde{e}_2 \neq 0_E$  car  $(e_1, e_2)$  est libre.

- Pour  $\widehat{e}_3$ :

On pose  $\widetilde{e}_3 := e_3 - f_3$  c'est-à-dire :

$$\widetilde{e}_3 := e_3 - \underbrace{[(e_3 \mid \widehat{e}_1) \widehat{e}_1 + (e_3 \mid \widehat{e}_2) \widehat{e}_2]}_{\text{projeté orthogonal de } e_3 \text{ sur } \text{Vect}(\widehat{e}_1, \widehat{e}_2)}$$



L'expression du projeté orthogonal de  $e_3$  sur  $\text{Vect}(e_1, e_2)$  est bien  $(e_3 \mid \widehat{e}_1) \widehat{e}_1 + (e_3 \mid \widehat{e}_2) \widehat{e}_2$  car  $(\widehat{e}_1, \widehat{e}_2)$  est une BON de  $\text{Vect}(e_1, e_2)$ .  $\widetilde{e}_3$  est alors orthogonal à  $\widehat{e}_1$  et  $\widehat{e}_2$  toujours par propriété

du projeté orthogonal. On pose alors  $\widehat{e}_3 := \frac{\widetilde{e}_3}{\|\widetilde{e}_3\|}$ , pour être de norme 1.

On remarque, à nouveau, que  $\widetilde{e}_3 \neq 0_E$  car sinon, on aurait  $e_3 \in \text{Vect}(\widehat{e}_1, \widehat{e}_2) = \text{Vect}(e_1, e_2)$  et cela contredit la liberté de  $(e_1, e_2, e_3)$ .

### 6.3 L'algorithme général et le théorème

**Théorème 16** (Orthonormalisation de Gram-Schmidt). Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille libre de  $E$ . On construit par récurrence la famille  $(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_p)$  de la façon suivante:

- $\widehat{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$
- $\forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$ , si  $\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k$  sont construits, alors on définit  $\widehat{e}_{k+1}$  par:

$$\widetilde{e}_{k+1} := e_{k+1} - \underbrace{\sum_{i=1}^k (e_{k+1} \mid \widehat{e}_i) \widehat{e}_i}_{\substack{\text{on enlève à } e_{k+1} \\ \text{ses composantes} \\ \text{selon } \widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k}} \quad \text{puis} \quad \widehat{e}_{k+1} := \frac{\widetilde{e}_{k+1}}{\|\widetilde{e}_{k+1}\|}$$

Cette famille, appelée "orthonormalisée de  $(e_1, \dots, e_p)$ ", vérifie les propriétés suivantes :

1.  $(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_p)$  est orthonormée (d'où son nom) ;
2.  $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $\text{Vect}(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  (préservation de tous les sev intermédiaires).

**Remarque.** Une conséquence simple et importante de cet algorithme est que si  $E$  est de dimension finie (espace euclidien), alors il admet des BON. En effet, il suffit d'appliquer l'algorithme à n'importe laquelle de ses bases pour obtenir une BON.

**Théorème 17** (Théorème de la BON incomplète).

Si  $E$  est de dimension finie et si  $\mathcal{E} := (e_1, \dots, e_p)$  une famille orthonormée de  $E$ , alors on peut la compléter en une BON de  $E$ .

*Exemple 11. Calculer l'orthonormée de  $(1, X, X^2)$  pour le produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .*