

Séries numériques

1 Les séries réelles. Définitions - premières propriétés

1.1 Définitions

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle série de terme général u_n , la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On la note $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$: u_n est le terme d'indice n de la série, S_n est la somme partielle de rang n de la série.

Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel S , on dit que la série de terme général u_n est convergente, de somme S . On note alors :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Si la série de terme général u_n ne converge pas, on dit que la série est divergente.

Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Remarques :

- ★ Étudier une série de terme général u_n , c'est en fait étudier la suite des sommes partielles.
- ★ La série est divergente si la suite des sommes partielles est divergente.
- ★ Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir du rang n_0 , il faut considérer $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ pour $n \geq n_0$.

Définition 2. Si la série de terme général u_n converge et a pour somme S , on appelle reste d'indice n le réel $R_n = S - S_n$. On a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$, et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Exemples 1.

1. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{3^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)
2. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) (série harmonique)
3. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

1.2 Propriétés

Proposition 1.

Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Remarque. La nature d'une série ne dépend donc pas de ses premiers termes, ce qui explique qu'on puisse considérer des critères de convergence portant sur les termes u_n "à partir d'un certain rang" de la série.



Si la nature de la série ne dépend pas des premiers termes, sa somme, elle (si elle existe), en dépend!

Exemple 2. Les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{3^k}$ et $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k}$

Théorème 2 (Condition nécessaire de convergence d'une série).

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Conséquence : si (u_n) ne converge pas vers 0, on peut directement conclure que la série de terme général u_n ne converge pas.

Définition 3. Lorsque le terme général u_n d'une série ne converge pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement

Exemple 3. Considérons la série de terme général $\frac{\sin(\frac{1}{n})}{e^{1/n} - 1}$.



La réciproque du théorème est fausse ! Il suffit de considérer l'exemple de la série harmonique.

On commence donc toujours par s'assurer que le terme général tend bien vers 0 mais on garde en tête que, s'il suffisait que le terme général tende vers 0, on n'aurait pas un chapitre complet pour étudier la nature de ces suites !!

Proposition 3 (série télescopique).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de nombres réels, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

La série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge si et seulement si, la suite (u_n) converge.

En cas de convergence, on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) - u_0$.

Exemple 4. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$?

Théorème 4.

Si on dispose de deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergentes et de sommes respectives S et S' , alors

- la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est convergente de somme $S + S'$.
- La série $\sum_{n \geq 0} \lambda u_n$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) est convergente, de somme λS .

L'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n converge est donc un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

Remarque : Si les séries de termes généraux u_n et v_n divergent, on ne peut *a priori* rien en déduire sur la série de terme général $u_n + v_n$.

Comme pour les suites, on a $cv + cv = cv$, $cv + \text{div} = \text{div}$ et $\text{div} + \text{div} = ?$

Exemple 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = -\frac{1}{n}$, $w_n = \frac{1}{2n}$, que dire de la nature des séries de terme général $u_n + v_n$ et $u_n + w_n$?

2 Séries de référence

2.1 Séries géométriques - séries géométriques dérivées

Proposition 5.

Soit q un réel. La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

On appelle **série géométrique de raison q** , une série de la forme $\sum_{n \geq n_0} q^n$.

Proposition 6.

Soit q un réel. La série $\sum_{n \geq 0} nq^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Cette série est appelée **série géométrique dérivée**.

Remarque Cette série est classique mais pas au programme, vous devez donc calculer sa somme si vous souhaitez l'utiliser.

2.2 Série exponentielle

Théorème 7.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$, appelée série exponentielle, est convergente, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

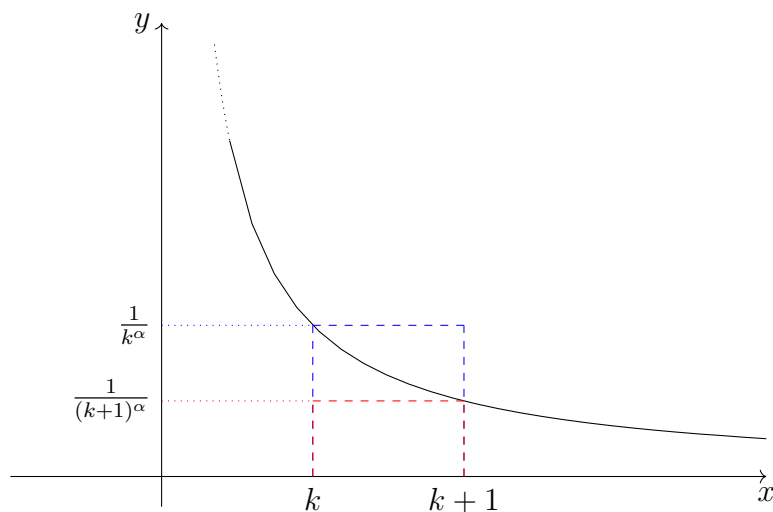
2.3 Séries de Riemann

Définition 4. On appelle **série de Riemann** toute série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Théorème 8.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si : $\boxed{\alpha > 1}$.

Le résultat découle de ce que l'on appelle une comparaison série/intégrale. L'idée est d'encadrer l'intégrale entre deux rectangles puis utiliser cet encadrement pour encadrer le terme général de la série entre deux intégrales. Considérons la figure suivante:



Exercice 1. Série harmonique - constante d'Euler

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) = H_n - \ln(n)$, où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq 0$. Étudier la monotonie de la suite (v_n) .
4. En déduire que (v_n) converge vers une constante γ (**constante d'Euler**), et qu'on peut écrire :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

5. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente, et prouver que : $H_n \sim \ln(n)$.
6. On considère à présent la *série harmonique alternée* de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Pour x dans $[0, 1]$ et n dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose : $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$

- (a) Calculer une autre expression de $S_n(x)$. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.
- (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = 0$ à l'aide d'un encadrement.
- (c) Démontrer enfin que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente, et calculer sa somme.

3 Séries à termes positifs

3.1 Généralités

Théorème 9.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée.

Remarque : Si la série converge, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

Exemple 6. On considère la série de terme général $\frac{1}{n^2}$

Remarque. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série divergente à termes positifs, alors $S_n \rightarrow +\infty$.

3.2 Règles de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 10.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose qu'à partir d'un certain rang n_0 : $0 \leq u_n \leq v_n$ alors :

- Si la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$
- Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Exemples 7.

1. On cherche à étudier la série de terme général $\frac{1 + (-1)^n}{n^2}$.
2. On cherche à étudier la série de terme général $\frac{2 + \cos(n)}{n}$.

Proposition 11.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives à partir d'un certain rang.

- Si $u_n = o(v_n)$ et si la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $v_n = o(u_n)$ et si la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge. Autrement dit, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ et la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.
- Si $u_n = O(v_n)$ et si la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Remarques:

- Les deux premiers points restent vrais si on a seulement un $O(\)$ (et pas un $o(\)$).
- La reformulation du deuxième point vient du fait que, comme les termes généraux sont positifs, si on a $v_n = o(u_n)$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Les séries de Riemann servent souvent de référence pour étudier la nature d'une série à termes positifs. De même, les premiers points de la proposition seront généralement appliqués avec les séries de Riemann ainsi :
 - S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ alors u_n est le terme général d'une série convergente. En effet, on a alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\frac{1}{n^\alpha}$ terme général d'une série convergente.
 - S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$, alors u_n est le terme général d'une série divergente. En effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = +\infty$ et la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge vers $+\infty$ donc il est en de même pour la série de terme général u_n .

Exemples 8.

1. Étude de la série de terme général $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.
2. Étude de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $e^{1/n^2} - 1$.
4. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos \frac{1}{n} + e^{1/n}$.

Proposition 12.

Si u_n est équivalent à v_n ET (v_n) est de signe constant à partir d'un certain rang, alors les séries sont de même nature.

Exemples 9.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = e^{1/\sqrt{n}} - 1 + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = n\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$.
3. On peut même conclure si on n'a pas d'équivalent : Considérons la série de terme général $u_n = \tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}$.



Si on trouve un équivalent de signe non constant, on ne peut rien conclure !!!!

Exercice 2. Série alternée

1. On veut étudier la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles. On a donc, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
 - (a) On pose $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (S_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
 - (b) En déduire la nature de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis celle de la série.
2. On considère la série de terme général $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.
 - (a) Faites un DL en $O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ du terme général.
 - (b) Conclure sur la nature de la série.

4 Séries absolument convergentes

Définition 5. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

Une série qui est convergente, mais pas absolument convergente, est dite semi-convergente.

Exemple 10. La série harmonique alternée de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est semi-convergente.

Remarque: Le raisonnement précédent est le même pour montrer la convergence d'une série de terme général $(-1)^k a_k$ avec (a_k) une suite décroissante et qui tend vers 0 (ici $a_k = \frac{1}{k}$). On appelle ce critère, le critère des séries alternées et il est hors programme. Il vous faudra donc démontrer qu'une telle série converge en utilisant le raisonnement ci-dessus (grand classique donc !).

Proposition 13.

Toute série absolument convergente, est convergente.

Exemples 11.

1. Étude de la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$.

2. Nature de la série de terme général $u_n = e^{1/n} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}}$

Remarque: la règle de $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ pour $\alpha > 1$ entraîne la convergence de $\sum u_n$ même si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de signe constant.

Exemple 12. série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$

5 Séries à termes complexes

Comme pour les suites, on peut se ramener à l'étude de séries réelles en considérant les parties réelles et imaginaires.

Définition 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe, on dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Si c'est le cas, on appelle somme de la série et on note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la limite de la suite des sommes partielles.

Proposition 14.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries réelles $\sum \operatorname{Re}(u_k)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_k)$ convergent. Si c'est le cas, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_k)$$

Définition 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe, on dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

On montre, comme dans le cas réel, que la convergence absolue implique la convergence (la réciproque étant, bien sûr, toujours fausse). Cela va permettre de raisonner avec le module pour utiliser le critère de comparaison des séries à termes positifs.

Les séries de référence: télescopique, géométrique et exponentielle sont définies comme dans le cas réel et ont les mêmes critères de convergence (en remplaçant la valeur absolue par le module).