

TD 23 : Espaces préhilbertiens.

1 Produit scalaire

Exercice 1.

Montrer que les applications suivantes définissent des produits scalaires sur E :

1. $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}$).
2. $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2) dt$ sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
3. $(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

2 BON et Gram-Schmidt

Exercice 2.

On suppose $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) = \sum a_k b_k$. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(X^2 - 1, 3X + 1, X^2 + X)$.

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

1. Montrer que l'image d'une base de E par f est une base de E .
2. En déduire que f est linéaire.

Exercice 4.

Soit E un espace préhilbertien réel avec $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ tels que

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|e_i\| = 1 \\ \forall x \in E, \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2. \end{cases}$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E .

3 Cauchy-Schwarz

Exercice 5.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b f'^2(t) dt \right) \geq \left(\frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2} \right)^2$$

Exercice 6.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(2x^2 + y^2 + 5z^2) \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{17}{10}$

Exercice 7.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$. Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $I_{m+n}^2 \leq I_{2n} I_{2m}$.

4 Orthogonal d'un ssev

Exercice 8.

On suppose $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer l'orthogonal de $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - z + t = 0\}$

Exercice 9.

On considère sur $M_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$,

$$(A|B) = \text{Tr}(A^\top B).$$

Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Exercice 10.

Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

On considère $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Déterminer l'orthogonal de H .

Exercice 11.

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tous $f, g \in E$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

2. Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, V contient une fonction polynomiale de degré n . Que peut-on en déduire sur la dimension de V ?
3. Soit $W = \{f \in E \mid f = f''\}$. Déterminer une base de W puis sa dimension.
4. Montrer que V et W sont orthogonaux.
5. Montrer que $E = V \oplus W$.

5 Projection et symétrie orthogonale

Exercice 12.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 = x + 2y + 3z + 4t\}$$

1. Donner la dimension de F .
2. Déterminer une BON de $F^\perp$.
3. Soit $u = (1, 0, 1, 0)$, déterminer $d(u, F)$.

Exercice 13.

On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 = x + y + 2z\}$$

1. Déterminer $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale s par rapport à F dans la base canonique.

1

Exercice 14.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose,

$$\forall P, Q \in E, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$$

1. Montrer que l'application ci-dessus définit un produit scalaire.

$$2. \text{ Pour tout } j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ on pose } P_j(X) = \frac{\prod_{i \neq j} (X - a_i)}{\prod_{i \neq j} (a_j - a_i)}.$$

1. une symétrie orthogonale est une symétrie d'axe F parallèlement à $F^\perp$

- (a) Que vaut $P_j(a_k)$?
 - (b) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille orthonormale. En déduire que c'est une base de E .
3. Calculer la distance d'un polynôme Q de E au sous-espace

$$H = \left\{ P \in E, \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}.$$

Exercice 15.

On considère sur $M_2(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $\forall (A, B) \in M_2(\mathbb{R})^2$,

$$(A|B) = \text{Tr}(A^\top B).$$

On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. Trouver une base de $F^\perp$.
2. Déterminer la projection orthogonale de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur F .

6 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 16.

Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$2 + \|x + y\|^2 \leq 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)$$

Exercice 17.

Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ la famille $((1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$.

Exercice 18.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x^2 + y^2 + z^2) \leq 1$. Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$

Exercice 19.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{2^n(n+1)}$$

Exercice 20.

On considère sur $M_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$,

$$(A|B) = \text{Tr}(A^\top B).$$

Soit $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que F est un ssev de $M_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 21.

Montrer que si E est un espace préhilbertien réel, $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Exercice 22.

On suppose $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y - z + t = 0\}$$

On note p la projection orthogonale sur F . Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 23.

On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0 = 2x - y\}$$

On note s la symétrie orthogonale par rapport à F . Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 24.

On munit $M_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\top B)$.

1. On note $S_3(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel constitué des matrices symétriques. Déterminer le supplémentaire orthogonal de $S_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la distance de la matrice M ci-dessous au sous-espace vectoriel $S_3(\mathbb{R})$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

7 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 25.**

Soit a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel, k un réel et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle.$$

Donner une CNS pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 26.

Soit E un espace vectoriel euclidien. On considère n vecteurs unitaires $(e_1, \dots, e_n)$ de E tels que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2.$$

1. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E .
2. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E .

Exercice 27. ⚙️

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

1. Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
4. Si E est de dimension finie, alors $(F^\perp)^\perp = F$.
5. Que devient l'inclusion de la question 3 si E est de dimension finie.

Exercice 28. ⚙️ ⚙️

On considère un espace vectoriel euclidien de dimension $N \geq 2$. On suppose qu'il existe n vecteurs unitaires deux à deux distincts $(u_1, \dots, u_n)$ et un réel a tel que pour tout i, j distincts, $\langle u_i | u_j \rangle = a$.

1. Montrer que $a \neq 1$.
2. Calculer la norme de $v = \sum_{i=1}^n u_i$. En déduire que $a \geq -\frac{1}{n-1}$.
3. Montrer que la famille $(u_2 - u_1, \dots, u_n - u_1)$ est libre. Qu'en résulte-t-il?
4. On suppose que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée. Montrez que $a = -\frac{1}{n-1}$.

Memo

- Comment montrer qu'une application est un produit scalaire?
Revenir à la définition
- Comment déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel?
 - Trouver un nombre suffisant de vecteurs orthogonaux à une base
 - Interpréter les équations de l'espace vectoriel
 - Revenir à la définition
- Comment déterminer une BON
 - Faire preuve d'intuition/lire les questions précédentes
 - Trouver une BON d'un ssev et de son supplémentaire orthogonal
 - Utiliser Gram-Schmidt
- Comment déterminer le projeté orthogonal
 - Utiliser l'expression dans une BON
 - Décomposer comme pour un projecteur classique
- Comment calculer la distance à un espace vectoriel de dimension finie?
 - Déterminer le projeté sur l'orthogonal
 - Déterminer le projeté puis appliquer la définition
- Comment utiliser Cauchy-Schwarz?
identifier l'inégalité à montrer en reconnaissant un produit scalaire.

Correction du TD n 23

Correction 1

1. symétrique, bilinéaire, positive et définie en se souvenant que $P^{(k)}(0) = k!a_k$.
2. Symétrique, bilinéaire, positive. Si $\langle f, f \rangle = 0$ alors la fonction positive $t \mapsto (1 - t^2)f^2(t)$ est nulle sur $[0, 1]$ donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1[$ et, par continuité de f , f est nulle sur $[0, 1]$.
3. Si $\langle f, f \rangle = 0$, $f'(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ donc f est constante sur $[0, 1]$ et comme $f(0) = 0$, on a f nulle

Correction 2

On trouve

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 1), \frac{1}{\sqrt{38}}(X^2 + 6X + 1), \frac{1}{\sqrt{19}}(3X^2 - X + 3) \right)$$

Correction 3

1. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une bon, alors $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \delta_{i,j}$ donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille orthonormale et comme de cardinal n , c'est une bon de E .
2. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors $f(x) = \sum_{j=1}^n \langle f(x), f(e_j) \rangle f(e_j)$ car c'est une bon et par linéarité,

$$\langle f(x), f(e_j) \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j \rangle = x_j,$$

$$\text{donc } f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) \text{ et } f \text{ est linéaire.}$$

Correction 4

On a $\|e_i\| = 1$ pour tout i et

$$\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j \rangle^2,$$

donc

$$\sum_{i \neq j} \langle e_i, e_j \rangle^2 = 0,$$

puis $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. La famille est donc orthonormale. Montrons que c'est une base de E .

Pour cela, on va montrer que pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. Soit donc $x \in E$,

on pose $y = x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. On a $\langle y, e_j \rangle = 0$ pour tout j donc $\|y\|^2 = 0$ et $y = 0$. On a montré que la famille était génératrice de E et libre car orthonormale donc c'est une base de E .

Correction 5 On applique Cauchy-Schwarz à f et f' avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Correction 6 Cauchy-Schwarz appliqué à $(\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

Correction 7 On applique Cauchy-Schwarz à $t \mapsto t^n \sqrt{f}$ et $t \mapsto t^m \sqrt{f}$ avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Correction 8 On remarque que $G = (\text{Vect}((1, 2, -1, 1)))^\perp$ donc $G^\perp = \text{Vect}((1, 2, -1, 1))$.

Correction 9 On note $S_n(\mathbb{R})$, $A_n(\mathbb{R})$ et $D_n(\mathbb{R})$ respectivement l'ensemble des matrices symétriques, antisymétriques et diagonales.

On peut remarquer que la base (E_{ij}) de $M_n(\mathbb{R})$ est une BON pour ce produit scalaire. Une base de l'ensemble des matrices diagonales est $(E_{ii}, i \in \llbracket 1, n \rrbracket)$, une base des matrices symétriques est $(E_{ii}, i \in \llbracket 1, n \rrbracket) \cup (E_{ij} + E_{ji}, i < j)$.

L'orthogonal des matrices diagonales est l'ensemble des matrices de diagonale nulle. En effet, si $M \in D_n(\mathbb{R})^\perp$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle M, E_{ii} \rangle = 0$, soit $m_{ii} = 0$ (puisque $M = \sum_{i,j} m_{ij} E_{ij}$ et $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ BON pour ce produit scalaire.)

L'orthogonal des matrices symétriques est l'ensemble des matrices antisymétriques. En effet, les matrices antisymétriques, c'est-à-dire les matrices vérifiant $M^T = -M$ admettent pour base $(E_{ij} - E_{ji})_{i < j}$. Si $i < j$ et $k < l$, on a

$$\langle E_{ij} + E_{ji}, E_{kl} - E_{lk} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } (i, j) \neq (k, l) \\ \|E_{ij}\|^2 - \|E_{ji}\|^2 = 0 & \text{si } (i, j) = (k, l) \end{cases}$$

Remarque : On ne peut pas avoir $(i, j) = (l, k)$ car $i < j$ et $k < l$.

Par ailleurs, on a

$$\langle E_{ii}, E_{kl} - E_{lk} \rangle = 0,$$

puisque la base (E_{ij}) est orthonormée. On a donc bien que pour tout $k < l$, $E_{kl} - E_{lk} \in S_n(\mathbb{R})^\perp$ d'où $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})$. Par égalité des dimensions, on a montré que l'orthogonal des matrices symétriques est l'ensemble des matrices antisymétriques.

Correction 10 Soit $f \in H^\perp$ alors $h : t \mapsto tf(t)$ est un élément de H donc $\langle h, f \rangle = \int_0^1 tf'(t) dt = 0$. Par stricte positivité de l'intégrale, comme $t \mapsto tf^2(t)$ est positive et continue, on a $tf^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in]0, 1]$ puis $f \equiv 0$ par continuité. Ainsi, on a montré $H^\perp \subset \{0\}$. Comme $H^\perp$ est un ssev de E , on a donc $H^\perp = \{0\}$.

Correction 11

1. c'est une forme, symétrique, linéaire par rapport à la première variable par linéarité de la dérivation et de l'intégrale donc bilinéaire. Elle est bien positive et si f vérifie $\int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t)) dt = 0$, on a l'intégrale nulle d'une fonction continue et positive, la fonction est donc nulle. Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$, $f^2(t) + f'^2(t) = 0$. Par somme de deux carrés réels, on en déduit que $f^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ donc f est bien nulle. On définit bien un produit scalaire.
2. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f_n : x \mapsto x^{n-1}(x-1)$ est un élément de V . La famille $(f_n)_{n \geq 2}$ est libre car la famille de polynômes correspondants l'est (degrés distincts). On en déduit que V contient une famille libre de cardinal aussi grand que possible, V est donc de dimension infinie.
3. On résout l'équation différentielle. Une base de W est $(\sin, \cos)$ et sa dimension est 2.
4. Soit $f \in V$ et $g \in W$. Alors

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t) dt = \int_0^1 f(t)g(t) dt + [g'(t)f(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)g''(t) dt = 0$$

car $f(0) = f(1) = 0$ et $g'' = g$. On en déduit que les deux ssev sont orthogonaux.

5. On a montré que $V \subset W^\perp$. Montrons l'autre inclusion. Soit donc $f \in W^\perp$. Alors pour tout $g \in V$, $\langle f, g \rangle = 0$ donc, d'après le calcul précédent, on a $[f(t)g'(t)]_0^1 = 0$, et ce pour tout $g \in V$. En prenant $g = \cos$, on obtient $f(1) = 0$. On prend alors $g = \sin$ pour montrer que $f(0) = 0$ ce qui montre bien l'inclusion souhaitée d'où $W^\perp = V$. Comme W est de dimension finie, on sait qu'il est supplémentaire avec son orthogonal. On en déduit donc l'égalité souhaitée.

Correction 12

1. On a $\dim(F) = 2$.
2. On remarque que $F = \text{Vect}(u, v)^\perp$ avec $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3, 4)$ donc $F^\perp = \text{Vect}(u, v)$. Comme u et v sont non colinéaires, ils forment une base de $F^\perp$.
3. On cherche une base orthogonale de $F^\perp$. On orthogonalise (u, v) (attention, il faut appliquer la formule avec $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, on trouve le vecteur $\frac{1}{2}(-3, -1, 1, 3)$ donc $((1, 1, 1, 1), (3, 1, -1, -3)) = (u, w)$ est une base orthogonale de $F^\perp$. On a donc

$$q(x) = \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle x, w \rangle}{\|w\|^2} w,$$

où q désigne la projection ortho sur $F^\perp$. On a donc

$$d(x, F) = \|q(x)\| = \left\| \frac{1}{5}(4, 3, 2, 1) \right\| = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Correction 13

1. On remarque que $F = \text{Vect}(u, v)^\perp$ avec $u = (1, -1, 1)$ et $v = (1, 1, 2)$. On a donc $F^\perp = \text{Vect}(u, v)$
2. On a F de dimension 1, $F = \text{Vect}(w)$ avec $w = (3, 1, -2)$. On a donc

$$p(x) = \frac{\langle x, w \rangle}{\|w\|^2}$$

et

$$s(x) = 2p(x) - x = \frac{\langle x, w \rangle}{7} w - x.$$

On en déduit que

$$\text{Mat}_B(s) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Correction 14

1. forme, symétrique, linéaire par rapport à la première coordonnée donc bilinéaire, positive. On suppose $\langle P, P \rangle = 0$ alors $P(a_k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc P admet $n+1$ racines distinctes. Or $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $P = 0$.
2. (a) On a $P_j(a_k) = \delta_{jk}$
(b) On a $\langle P_j, P_i \rangle = \sum_{k=0}^n \delta_{jk} \delta_{ik} = \delta_{ij}$ donc la famille est orthonormale.

3. On remarque que

$$H = \left\{ P \in E, \sum_{k=0}^n P(a_k) \right\} = \text{vect}(1)^\perp = \mathbb{R}^\perp,$$

si on note $A = 1$. On en déduit que

$$d(Q, H) = \frac{|\langle A, Q \rangle|}{\|A\|} = \frac{\left| \sum_{k=0}^n Q(a_k) \right|}{\sqrt{n+1}}.$$

Correction 15

1. On raisonne par équivalence. Soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$. On a

$$M \in F^\perp \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M \right\rangle = 0$$

donc

$$M \in F^\perp \Leftrightarrow m_{11} = m_{22} \text{ et } m_{12} = -m_{21} \Leftrightarrow M \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

2. On utilise l'expression de la projection orthogonale :

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc la projection de B sur F vaut $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Correction 16 On raisonne par équivalence en remplaçant $\|x+y\|^2$ par $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y\|^2$ (identité du parallélogramme). On arrive à

$$\|x-y\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y\|^2 \geq 0,$$

ce qui est vrai donc l'inégalité donnée l'est aussi.

Correction 17 On trouve $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \right)$

Correction 18 Cauchy-Schwarz appliqué à (x, y, z) et $(1, 2, 3)$.

Correction 19 On note $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on suppose que $\mathbb{R}^{n+1}$ est muni de son produit scalaire canonique. On pose $x = \sum_{i=0}^n \sqrt{\binom{n}{i}} e_i = \left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n} \right)$ et $y = (1, \dots, 1)$. Alors $\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^n \sqrt{\binom{n}{i}}$, $\|x\| = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ et $\|y\| = n+1$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz x et y , on a l'inégalité souhaitée.

Correction 20

1. C'est le noyau de la forme linéaire trace donc un ssev et, par le thm du rang, sa dimension est $n^2 - 1$.

On peut aussi dire qu'un élément de F vérifie $m_{nn} = -\sum_{i=1}^n m_{ii}$ donc il est engendré par $(E_{ij}, i \neq j) \cup (E_{ii} - E_{nn}, i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket)$. C'est assez rapide de montrer que cette famille est libre et elle est de cardinal $n^2 - 1$.

2. On sait que $\dim(F^\perp) = n^2 - \dim(F) = 1$, il suffit donc de donner un élément non nul de $F^\perp$. On remarque que $I_n \in F^\perp$ car pour tout $M \in F$, $\langle I_n, M \rangle = \text{Tr} I_n^\top M = \text{Tr} I_n M = \text{Tr}(M) = 0$, donc $F^\perp = \text{Vect}(I_n)$.

Correction 21 Soit $x \in E$, alors $\langle x, 0_E \rangle = 0$ donc $x \in \{0_E\}^\perp$. On en déduit que $E \subset \{0_E\}^\perp \subset E$ donc $E = \{0_E\}^\perp$.

Soit maintenant $x \in E^\perp$ alors $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0_E$. On a donc $E^\perp \subset \{0_E\}$ donc $E^\perp = \{0_E\}$ car $E^\perp$ est un ssev.

Correction 22 On a $F = \text{vect}(u)^\perp$ avec $u = (1, -1, 1, -1)$ donc $F^\perp = \text{vect}(u)$. Pour tout x de E , on a $p(x) = x - q(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$ avec $\|u\|^2 = 4$. On a donc

$$\text{Mat}_B(p) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction 23 On a $F = \text{vect}(u, v)^\perp$ avec $u = (1, 2, -1)$ et $v = (2, -1, 0)$ donc $\dim(F) = 1$. On trouve $F = \text{vect}(w)$ avec $w = (1, 2, 5)$. Pour tout x de E on a $s(x) = 2p(x) - x =$

$\frac{1}{15} \langle x, w, w \rangle - x$ donc

$$Mat_B(s) = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -14 & 2 & 5 \\ 2 & -11 & 10 \\ 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Correction 24

1. Le supplémentaire orthogonal est l'ensemble des matrices antisymétriques c'est-à-dire les matrices vérifiant $M^T = -M$ ou encore $m_{ij} = -m_{ji}$.

2. On sait que toute matrice M s'écrit $\underbrace{\frac{M+M^T}{2}}_{\in S_3(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{M-M^T}{2}}_{\in A_3(\mathbb{R})}$

On en déduit, on notant p la projection orthogonale sur $S_3(\mathbb{R})^\perp$, que

$$p(M) = \frac{1}{2}(M - M^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ensuite $\|p(M)\| = \frac{3}{\sqrt{2}}$ car $\|A\|^2 = \sum_{ij} a_{ij}^2$ (cf cours lorsque l'on a montré que l'on définissait bien un produit scalaire).

Correction 25 On voit que φ est symétrique et bilinéaire. On suppose φ définie positive. On sait, par cauchy-Schwarz que $\forall x \in E, \|x\|^2 \geq \langle x, a \rangle^2$ car $\|a\|^2 = 1$.

On en déduit que $\varphi(x, x) = \|x\|^2 + k \langle x, a \rangle^2 \leq (k+1) \|x\|^2$ donc il faut que $k+1 \geq 0$. Si $k = -1$, on a $\varphi(a, a) = 0$ et φ ne sera pas définie. Il faut donc $k > -1$.

Réciproquement, supposons que $k > -1$. On a $\varphi(x, x) \geq (k+1) \langle x, a \rangle^2 \geq 0$ et si $\varphi(x, x) = 0$ alors d'après l'inégalité

$$\varphi(x, x) \geq (k+1) \langle x, a \rangle^2,$$

on a $\langle x, a \rangle = 0$ donc $\varphi(x, x) = \|x\|^2$ d'où $x = 0_E$ et φ est bien un produit scalaire.

Correction 26

1. Soit $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$. Alors $\|x\|^2 = 0$ car $\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout i , on a donc $x = 0_E$. Ainsi, on a $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = \{0_E\}$ donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$ (car E euclidien) et la famille est bien génératrice de E .

2. On a $\|e_j\|^2 = 1 = 1 + \sum_{i \neq j} \langle e_j, e_i \rangle^2$ donc $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. On en déduit que la famille est orthonormale donc libre et avec la question 1, c'est une bon de E .

Correction 27

1. Soit $x \in G^\perp$, montrons que $x \in F^\perp$. Soit donc $y \in F$, montrons que $\langle x, y \rangle = 0$. On a $y \in F$ et $F \subset G$ donc $y \in G$. Comme $x \in G^\perp$, on a $\langle x, y \rangle = 0$. On a donc bien $x \in F^\perp$ d'où l'inclusion.

2. On le montre par double inclusion. Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$, montrons que l'on a $x \in (F+G)^\perp$. On se donne donc $a+b \in F+G$, on a

$$\langle x, a+b \rangle = \langle x, a \rangle + \langle x, b \rangle.$$

Or $\langle x, a \rangle = 0$ puisque $x \in F^\perp$ et $a \in F$. De même, $\langle x, b \rangle = 0$, on a donc $\langle x, a+b \rangle = 0$ donc $x \in (F+G)^\perp$ et on a montré l'inclusion $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.

Par ailleurs, on a $F \subset (F+G)$ donc d'après la question précédente, $(F+G)^\perp \subset F^\perp$. De même, $G \subset (F+G)$ donc $(F+G)^\perp \subset G^\perp$. On en déduit que $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

On a montré l'égalité par double inclusion.

3. Soit $(a, b) \in F^\perp \cap G^\perp$, montrons que $a+b \in (F \cap G)^\perp$. Soit donc $x \in F \cap G$, alors $\langle x, a+b \rangle = \langle x, a \rangle + \langle x, b \rangle$. Or $\langle x, a \rangle = 0$ puisque $a \in F^\perp$ et $x \in F$. De même, $\langle x, b \rangle = 0$ donc $a+b \in (F \cap G)^\perp$ et on a montré l'inclusion $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

On peut aussi le montrer en raisonnant avec les ensembles : On a $F \cap G \subset F$ donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. De même, $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Comme $(F \cap G)^\perp$ est un ssev, on a donc $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

4. On l'a vu en cours ! On a $F \subset (F^\perp)^\perp \subset F$ car si $x \in F$, alors $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in F^\perp$ donc $x \in (F^\perp)^\perp$. On conclut avec l'égalité des dimensions car $F \oplus F^\perp = E = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$.

5. On applique la question 2 à $F^\perp$ et $G^\perp$, on obtient :

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$$

donc $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$. On en déduit que $(F \cap G)^\perp = ((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Correction 28

1. Si $\langle u_i, u_j \rangle = 1$ pour tout i, j , alors pour i, j quelconque, $\|u_i - u_j\|^2 = 1 - 2 + 1 = 0$ donc $u_i = u_j$ ce qui est absurde. donc $a \neq 1$.

2. On a $\|v\|^2 = \sum_{i,j} \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i \neq j} a + n$ on a donc $(n^2 - n)a + n \geq 0$ donc $a \geq -\frac{n}{n^2 - n}$ d'où le résultat.

3. Pour tout $i, k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ on a

$$\langle u_i - u_1, u_k \rangle = \langle u_i, u_k \rangle - \langle u_1, u_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 - a & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose qu'il existe des réels λ_i non tous nuls tels que $\sum \lambda_i (u_i - u_1) = 0_E$, alors pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\sum \lambda_i \langle u_i - u_1, u_k \rangle = 0$ donc $\lambda_k (1 - a) = 0$ d'où $\lambda_k = 0$ pour tout k donc la famille est libre. On en déduit que $N \geq n - 1$.

4. On suppose $(u_1, \dots, u_n)$ liée alors il existe des réels λ_i tels que $\sum \lambda_i u_i = 0_E$. On a donc, pour tout k , $\langle \sum \lambda_i u_i, u_k \rangle = 0 = \sum_{i \neq k} \lambda_i a + \lambda_k$ ou encore

$$\sum_i \lambda_i a + (1 - a) \lambda_k = 0.$$

On somme pour k variant de 1 à n :

$$na \sum_i \lambda_i + (1 - a) \sum_k \lambda_k = 0$$

donc $\sum_i \lambda_i (na + 1 - a) = 0$. Montrons que $\sum_i \lambda_i \neq 0$. On suppose, par l'absurde que $\sum_i \lambda_i = 0$, alors $-\lambda_1 = \sum_{i \geq 2} \lambda_i$ donc

$$0 = \lambda_1 u_1 + \sum_{i \geq 2} \lambda_i u_i = \sum_{i \geq 2} \lambda_i (u_i - u_1)$$

Or $(u_2 - u_1, \dots, u_n - u_1)$ est libre donc $\forall k \geq 2, \lambda_k = 0$ puis $\lambda_1 = 0$. On obtient une contradiction, on a donc $\sum_i \lambda_i \neq 0$ d'où $na + (1 - a) = 0$ d'où $a = -\frac{1}{n-1}$.