

1 Topologie

Exercice 1.

Préciser si les domaines $D \subset \mathbb{R}^2$ suivants sont fermés ou non, ouverts ou non, bornés ou non.

1. $D = \mathbb{R}^2$.
2. $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
3. $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+$.
4. $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
5. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 5\}$.
6. $D = \{(x, y) \mid 2x + 3y \leq 1\}$.

Exercice 2.

1. Soit I un ensemble quelconque et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que leur union $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U \cap V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $U_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y| < \frac{1}{n}\}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble U_n est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais que leur intersection n'en est pas un.

2 Continuité, dérivabilité

Exercice 3.

Soit $a, b > 0$. On définit l'application $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^a y^b}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de (a, b) a-t-on f continue en $(0, 0)$?
2. Pour $(a, b) = (1, 1)$, montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.

Exercice 4. ⚙️

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On définit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Montrer que F est continue.

Exercice 5.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Déterminer la dérivée des fonctions

$$a : \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x, x) \end{matrix} \quad \text{et} \quad b : \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x, F(x, x)) \end{matrix}$$

Déterminer ensuite les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$c : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto F(y, x) \end{matrix} \quad \text{et} \quad d : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto F(y, F(x, x)) \end{matrix}$$

Exercice 6.

Montrer que la norme $N : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ n'admet pas de dérivées partielles en $(0, 0)$, mais que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est de classe C^1 . Donner ses dérivées partielles.

3 Équations aux dérivées partielles

Exercice 7.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (E)$$

On pourra utiliser le changement de variable $(u, v) = (2x + y, 3x + y)$.

Exercice 8.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f \quad (E)$$

On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 9.

Déterminer la forme des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On pourra poser le changement de variable $(u, v) = (x + ct, x - ct)$.

Exercice 10.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On pose $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Déterminer une équation aux dérivées partielles satisfaites par f .

4 Plan tangent et DL1

Exercice 11.

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentée par f , au point de coordonnées $(0, 0, 0)$.

Exercice 12.

Soit $f(x, y) = \frac{y^2}{2y - x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .
2. Est-ce un ouvert?
3. Déterminer et tracer la courbe de niveau $f(x, y) = 1$.
4. Écrire le DL1 de f en $(2, 3)$. En déduire une valeur approchée de f en $(2.2, 2.9)$.

5 Détermination d'extremum

Exercice 13.

Déterminer les extrema de la fonction $h : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 4$.

Exercice 14.

Déterminer les extrema éventuels des fonctions $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^3$ et $g : (x, y) \mapsto y - xy^3 - x$.

Exercice 15.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto 3xy - x^3 - y^3 \end{cases}$ admet exactement deux points critiques. Étudier si f admet ou non un extremum local en ces points.

6 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 16.

On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 17.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x, y) = \frac{f(x^2 + y^2) - f(0)}{x^2 + y^2}$$

Montrer que F admet une limite en $(0, 0)$ et la déterminer.

Exercice 18.

Étudier la continuité puis l'existence et la continuité des dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$F_1(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$F_2(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 19.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = f(E)$$

On pourra utiliser le changement de variable $(u, v) = (x + y, 2x + 3y)$.

Exercice 20.

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\delta f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

On pourra passer aux coordonnées polaires.

Exercice 21.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (E)$$

On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 22.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{l} 1. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} \end{array} \right. \\ 2. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \sin(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy) \end{array} \right. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y \end{array} \right. \\ 4. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y \cos(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy) \end{array} \right. \end{array}$$

Exercice 23.

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes en utilisant les changements de variables proposés :

$$\begin{array}{l} 1. 3 \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0, u = x + y; v = 2x + 3y. \\ 2. y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0, x + iy = re^{i\theta} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f, u = x; v = y - x \\ 4. x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}, x + iy = re^{i\theta}. \end{array}$$

Exercice 24.

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = (x + y - 2)^2 + \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$.

1. Donner le DL1 de f en $(2, 1)$.
2. Donner l'équation du plan tangent au point $(2, 1)$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(x, x) - 4(x - 1)^2$. Donner les extrema de g et préciser s'ils sont globaux.

Exercice 25.

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x^2}{y - 2x^2}$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f . Est-ce un ouvert?

2. Déterminer les courbes de niveau correspondant à $1, -\frac{1}{2}$ et 0 .
3. Calculer le gradient de f en tout point de D_f .
4. Déterminer un DL1 de f en $(1, 1)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.1)$.

Exercice 26.

Extrema éventuels des fonctions :

1. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$
2. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^4 + y^4$
3. $f(x, y) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{x + y}, x \in]0, 1[, y \in]0, 1[$
4. $f(x, y) = x^2 y + \ln(1 + y^2)$
5. $f(x, y) = x^2 y^3 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right)$
6. $f(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2)$
7. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
8. $f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$

7 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 27. ✖✖**

Déterminer les extrema de $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

avec $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

Exercice 28. ✖✖✖

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'une fonction continue $U \rightarrow \mathbb{R}$ ne peut pas être injective.

Correction du TD n 25

Correction 1

- $D = \mathbb{R}^2$ est un ouvert et un fermé, il est non borné.
- $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est non ouvert, fermé, non borné. Il n'est pas ouvert car aucune boule centrée en $(0, 1)$ (par exemple) n'est incluse dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
Soit $(a, b) \notin \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
— Si $a = 0$, alors $b < 0$. On pose $\epsilon = \frac{|b|}{2}$, alors pour tout $(x, y) \in B((a, b), \epsilon)$, la deuxième coordonnée est strictement négative donc la boule est incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Si $a < 0$, on considère la boule centrée en (a, b) de rayon $\frac{|a|}{2}$ dont les éléments ont une première coordonnée strictement négative donc la boule est incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. On a bien montré que $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est un fermé.
On peut aussi dire que $D = f^{-1}(\{0\})$ avec $f : (x, y) \mapsto (x - |x|)^2 + (y - |y|)^2$ qui est continue.
- $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+$ n'est pas ouvert car $B((0, 1), \epsilon)$ n'est jamais incluse dans D , il n'est pas fermé car $B((1, 0), \epsilon)$ n'est jamais incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$ et non borné.
- $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ est fermé borné et non ouvert. En effet, il est inclus dans $B((0, 0), 2)$ donc borné. Il est non ouvert car aucune boule ouverte centrée en $(1, 0)$ (par exemple) n'est incluse dans D . Montrons que son complémentaire est ouvert. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$.
— Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, alors d'après un cas traité précédemment, on sait qu'on peut trouver une boule ouverte incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ car c'est un ouvert. On a donc une boule ouverte incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$.
— Si $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, alors $a + b > 1$. On prend $\epsilon = \frac{a + b - 1}{2}$. Montrons que pour tout $(x, y) \in B((a, b), \epsilon)$, on a $x + y > 1$.
On a
$$x - a \in]-\epsilon, \epsilon[\text{ et } y - b \in]-\epsilon, \epsilon[$$

donc
$$x + y > a + b - 2\epsilon > 1$$

On a bien $B((a, b), \epsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$ qui est un ouvert. Par conséquent D est fermé.
- $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 5\}$ est ouvert car c'est une boule ouverte, elle est non fermée car toute boule ouverte centrée en $(\sqrt{5}, 0)$ intersecte D et n'est donc pas incluse dans son complémentaire, et bornée car incluse dans $B((0, 0), 3)$.

- $D = \{(x, y) \mid 2x + 3y \leq 1\}$ est non ouvert car toute boule centrée en $(2, -1)$ intersecte D et n'est donc pas incluse dans son complémentaire. C'est un fermé car si $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, alors $2a + 3b > 1$ et en posant $\epsilon = \frac{2a + 3b - 1}{2}$, on a $B((a, b), \epsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$. C'est un ensemble non borné car pour tout entier n , $(3n + 2, -2n - 1) \in D$.
On peut aussi dire que $D = f^{-1}(-\infty, 1])$ avec $f : (x, y) \mapsto 2x + 3y$ continue. C'est donc l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue donc un fermé. Son complémentaire est, lui, l'image réciproque d'un ouvert donc ouvert.

Correction 2

- Soit $p \in \bigcup_{i \in I} U_i$. On peut donc trouver $i_0 \in I$ tel que $p \in U_{i_0}$.
Comme U_{i_0} est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on peut trouver $r > 0$ tel que $D(p, r) \subset U_{i_0}$.
A fortiori, on a donc $D(p, r) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, ce qui conclut.
- Soit $p \in U \cap V$. On a donc $p \in U$ et $p \in V$.
Comme U est ouvert, on peut trouver $r' > 0$ tel que $D(p, r') \subset U$. De même, on peut trouver $r'' > 0$ tel que $D(p, r'') \subset V$.
Posons $r = \min\{r', r''\} > 0$. On a donc les inclusions $D(p, r) \subset D(p, r') \subset U$ et, de même, $D(p, r) \subset D(p, r'') \subset V$, donc $D(p, r) \subset U \cap V$, ce qui conclut.
- On montre comme dans le cours que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, les demi-plans :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > a\} \quad \text{et} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < b\}$$

sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

D'après la question précédente, il en va de même de leur intersection :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > a\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < b\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a < y < b\}.$$

En appliquant cette propriété à $a = -\frac{1}{n}$ et $b = \frac{1}{n}$, on obtient que U_n est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

En revanche, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car aucune boule ouverte n'est totalement incluse dans cet ensemble.

Correction 3

- On procède par disjonction de cas :
— Si $a + b = 2$, on a $f(x, x) = \frac{1}{2}$ donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.
— Si $a + b < 2$, alors $f(x, x) = \frac{x^{a+b}}{2x^2}$ n'admet pas de limite finie quand x tend vers 0.

— Si $a + b > 2$, alors $|f(x, y)| \leq \frac{||(x, y)||^{a+b}}{||(x, y)||^2} = ||(x, y)||^{a+b-2}$. Ainsi f est lipschitzienne donc continue en $(0, 0)$.

On en déduit que f est continue en $(0, 0)$ ssi $a + b > 2$.

2. On suppose $a = b = 1$. On a

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0,$$

pour tout $h \neq 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Il en est de même pour la dérivée partielle selon y .

Correction 4 En tout point (x, y) avec $x \neq y$, on a F continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que F est continue en (x, x) . Soit donc (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. D'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe c strictement compris entre a et b tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c).$$

Lorsque (a, b) tend vers (x, x) , on a $c \rightarrow x$. Or, f' est continue puisque f est C^1 . On a donc $f'(c) \rightarrow f'(x)$ ce qui montre que F est continue en (x, x) .

Correction 5 On applique la formule du cours :

$$a'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, x)$$

On écrit $b(x) = F(x, a(x))$, on a donc

$$b'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, a(x)) + a'(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, a(x)),$$

autrement dit :

$$b'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, F(x, x)) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, x) \right) \frac{\partial F}{\partial y}(x, F(x, x)),$$

On a

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(y, x) \text{ et } \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(y, x).$$

On remarque que $d(x, y) = F(y, a(x))$, on a donc

$$\frac{\partial d}{\partial x}(x, y) = a'(x) \frac{\partial F}{\partial y}(y, a(x)) \text{ et } \frac{\partial d}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(y, a(x))$$

Correction 6

- L'application partielle $v_1 : x \mapsto N(x, 0) = |x|$ n'étant pas dérivable en 0, la fonction N n'admet pas de première dérivée partielle en 0. Il en va de même pour la deuxième dérivée partielle.
- L'application $N^2 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ appartient clairement à $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, par opérations, avec :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial (N^2)}{\partial x}(a, b) = 2a \text{ et } \frac{\partial (N^2)}{\partial y}(a, b) = 2b.$$

Il s'ensuit que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est encore de classe C^1 . Elle est par ailleurs à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition, la fonction racine carrée étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la restriction de $N = \sqrt{N^2}$ à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est de classe C^1 , avec :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \frac{\partial N}{\partial x}(a, b) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \frac{\partial N}{\partial y}(a, b) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Correction 7 On a $(u, v) = (2x + y, 3x + y)$ donc $(x, y) = (v - u, 3u - 2v)$. On pose $F(u, v) = f(v - u, 3u - 2v)$. On a

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial x}(v - u, 3u - 2v) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(v - u, 3u - 2v) = 0$$

On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si il existe une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(u, v) = h(v) = f(v - u, 3u - 2v),$$

soit

$$f(x, y) = h(3x + y)$$

avec h de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, les solutions sont les fonctions de la forme

$$f(x, y) = h(3x + y),$$

avec h de classe $\mathcal{C}^1$.

Correction 8 On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

On a donc f solution de l'équation si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -g(r, \theta)$. On sait que les solutions de cette équation sont de la forme $g(r, \theta) = \lambda(r)e^{-\theta}$. On en déduit que les solutions

de l'équation sont les fonctions $f : (x, y) \mapsto \lambda(x^2 + y^2)e^{-\arctan(y/x)}$ avec λ une fonction de classe C^1 .

Correction 9 Soit y une solution de l'équation.

On a $(x, y) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(u-v)\right)$, on pose $f(u, v) = y\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(u-v)\right)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(u-v)\right) + \frac{1}{2c} \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(u-v)\right),$$

puis

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right) + \frac{1}{2c} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe F et G de classe C^2 telles que

$$f(u, v) = F(u) + G(v),$$

puis

$$y(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Réciproquement, une fonction de cette forme est bien solution de l'EDP.

Correction 10 On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} \varphi' \left(\frac{x}{y} \right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \varphi' \left(\frac{x}{y} \right)$$

On en déduit que f vérifie l'équation suivante :

$$y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Correction 11

1. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y + ye^x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^x$.

2. L'équation du plan tangent est donné par

$$z = f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = x + y.$$

Correction 12

1. On a $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2y - x^2 \neq 0\}$.
2. L'application $(x, y) \mapsto 2y - x^2$ est continue car polynomiale et D_f et l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par cette fonction continue donc c'est un ouvert.
3. On a $f(x, y) = 1 \Leftrightarrow 2y - x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$. La courbe de niveau est donc le cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon 1.
4. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^2}{(2y - x^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y^2 - 2yx^2}{(2y - x^2)^2},$$

donc le DL1 est :

$$f(x, y) = \frac{9}{2} + 9(x-2) - \frac{3}{2}(y-3) + o(\|(x-2, y-3)\|)$$

En négligeant le $o(\cdot)$, on obtient

$$f(2.2, 2.9) \simeq \frac{9}{2} + 9(2.2-2) - \frac{3}{2}(2.9-3) \text{ donc } f(2.2, 2.9) \simeq 6.15$$

Correction 13 Il y a un unique point critique $(1, 0, 0)$ et $h(1, 0, 0) = -2$. On écrit

$$h(u, v, w) = 2(u-1)^2 - 2 + v^2 + w^2 \geq -2.$$

On en déduit que h admet un minimum global en $(1, 0, 0)$ qui vaut -2 .

La fonction n'est pas majorée car $f(0, n, 0) \rightarrow +\infty$.

Correction 14 Le seul point critique est $(0, 0)$ avec $f(0, 0) = 0$ et pour tout $\epsilon > 0$, $f(\epsilon, 0) > 0$, $f(0, -\epsilon) < 0$ donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum local. Par ailleurs, $f(0, -n) \rightarrow -\infty$ et $f(n, 0) \rightarrow +\infty$ donc f n'est ni majorée ni minorée.

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = -y^3 - 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -3xy^2 \end{cases}$$

le seul point critique est $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$. On a $g\left(\frac{1}{3}, -1\right) = -1$ et

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{3} + h_1, -1 + h_2\right) &= -1 + h_2 - \left(\frac{1}{3} + h_1\right)(-1 + h_2)^3 - \frac{1}{3} - h_1 \\ &= -1 + h_2 - \left(\frac{1}{3} + h_1\right)(-1 + 3h_2 - 3h_2^2 + h_2^3) - \frac{1}{3} - h_1 \\ &= -1 + h_2^2 - \frac{h_2^3}{3} - 3h_1h_2 + 3h_1h_2^2 - h_1h_2^3 \end{aligned}$$

$g(0, 0) = 0$, $g(2, 0) = -2$ donc ce n'est ni un minimum global ni un max

Correction 15

Correction 16

1. On a $|f(x, y)| \leq ||(x, y)||^{1/2}$ donc f est continue en $(0, 0)$. Elle est continue ailleurs en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
2. Elle admet des dérivées partielles en dehors de $(0, 0)$. On a $\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{1}{|h|^{1/2}}$ donc f n'admet pas de dérivée partielle selon x en $(0, 0)$ (mais elle admet une dérivée partielle selon y égale à 0.)

Correction 17 On utilise le TAF. Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, il existe $c \in]0, x^2 + y^2[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x^2 + y^2) - f(0)}{x^2 + y^2}$. Lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$, c tend vers 0 et, par continuité de f' , on a donc $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) = f'(0)$.

Correction 18 La fonction F_1 est continue pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$. Lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, on a $x^2 + y^2 \rightarrow 0$. On écrit :

$$|F_1(x, y)| \leq \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)^2 \ln(x^2 + y^2),$$

et par le thm de croissances comparées, on a $F_1(x, y) \rightarrow 0$ et F_1 est bien continue en $(0, 0)$. Lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$, les dérivées partielles existent et valent :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2 + y^2},$$

et

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = 2yx^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^3x^2}{x^2 + y^2}.$$

On forme les taux d'accroissements en $(0, 0)$:

$$\frac{F_1(h, 0) - F_1(0, 0)}{h} = 0 = \frac{F_1(0, h) - F_1(0, 0)}{h}.$$

On en déduit que les dérivées partielles en $(0, 0)$ existent.

Pour montrer la continuité, on détermine les limites $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y)$ et $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)$. On a $|2xy^2 \ln(x^2 + y^2)| \leq (x^2 + y^2)^{3/2} \ln(x^2 + y^2)$ donc On a $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) = 0$ et $|2x^3y^2| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{5/2}$ donc

$$\left| \frac{2x^3y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{3/2}$$

ce qui montre $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) = 0$. On en déduit que $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$. La continuité de l'autre dérivée partielle se montre de la même manière, par symétrie des expressions.

Correction 19 On a $(x, y) = (3u - v, v - 2u)$. On pose $F(u, v) = f(3u - v, v - 2u)$. Si f est solution de (E) alors F vérifie

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(3u - v, v - 2u) = F(u, v),$$

donc il existe h de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$F(u, v) = \lambda(v)e^u.$$

Réciproquement, si h est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f(x, y) = \lambda(2x + 3y)e^{x+y},$$

alors f est bien solution de (E) et f de classe $\mathcal{C}^1$.

Correction 20 Soit f une solution. On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. On a $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$ donc $r \frac{\partial g}{\partial r} = r^2$. On en déduit que g est de la forme $g(r, \theta) = \frac{r^2}{2} + c(\theta)$ avec c de classe $\mathcal{C}^1$.

Réciproquement, si $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2 + y^2} c' \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right),$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} c' \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right).$$

On a donc bien f solution de l'équation.

Correction 21 On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y},$$

donc f est solution de (E) si et seulement si

$$r \frac{\partial g}{\partial r} = r.$$

On en déduit que $g(r, \theta) = r + \lambda(\theta)$. Ainsi, les solutions sont les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} + \lambda \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right)$$

avec λ de classe C^1 .

Correction 22

1. En intégrant la première équation, on trouve $f(x, y) = e^{xy} + 3x + c(y)$ et en injectant dans la deuxième, on doit avoir $c = cste$ donc

$$f(x, y) = e^{xy} + 3x + c, c \in \mathbb{R}$$

2. Si f est solution, alors f est de classe C^2 donc les dérivées croisées devraient être égales ce qui n'est pas le cas, il n'y a donc pas de solution.
3. On intègre la première équation, on trouve $f(x, y) = e^x y + c(y)$ puis en injectant dans la deuxième, on obtient $c'(y) = 2y$ donc les solutions sont

$$f(x, y) = e^x y + y^2 + c, c \in \mathbb{R}.$$

4. On intègre la première équation, on trouve $f(x, y) = e^x + \sin(xy) + c(y)$ puis en injectant dans la deuxième, on trouve $c = cste$ donc

$$f(x, y) = e^x + \sin(xy) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Correction 23

1. On a $(u, v) = (x + y, 2x + 3y)$ donc $(x, y) = (3u - v, v - 2u)$. On pose $g(u, v) = f(3u - v, v - 2u)$. On a f solution si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ donc $g(u, v) = c(v)$. On en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $f : (x, y) \mapsto c(2x + 3y)$ avec c une fonction C^1 .
2. On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
On a f solution si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$ donc $g = c(r)$. On en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $f : (x, y) \mapsto c\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ avec c une fonction C^1 .
3. On a $(u, v) = (x, y - x)$ donc $(x, y) = (u, u + v)$. On pose $g(u, v) = f(u, u + v)$. On a f solution si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial u} = g$ donc $g = \lambda(v)e^u$. On en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \lambda(y - x)e^x$ avec $\lambda \in C^1$.
4. On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. On a f solution ssi $\frac{\partial g}{\partial r} = 1$ donc $g(r, \theta) = r + c(\theta)$.
les solutions sont donc les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} + c(\arctan(y/x))$ avec c une fonction C^1 .

Correction 24

1. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x + y - 2) + (2x - y) \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(x + y - 2) - (4y + x) \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$$

On a $f(2, 1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 5$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -4$. Le DL1 s'écrit :

$$f(x, y) = 2 + 5(x - 2) - 4(y - 1) + o(\|(x - 2, y - 1)\|)$$

2. Le plan tangent a pour équation $z = 2 + 5(x - 2) - 4(y - 1)$

Correction 25

1. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 2x^2\}$, image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par une fonction continue donc ouvert.
2. C_1 correspond au graphe de $x \mapsto 3x^2$ privé de $(0, 0)$. $C_{-1/2}$ est la droite $y = 0$ privée du point $(0, 0)$ et C_0 est la droite $x = 0$ privée de $(0, 0)$.

$$3. \text{ On a } \partial f(x, y) = \left(\frac{2xy}{(y-2x^2)^2}, \frac{-x^2}{(y-2x^2)^2} \right).$$

$$4. \text{ On a } f(1, 1) = 1, \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -1 \text{ donc le DL1 est}$$

$$f(x, y) = 1 + 2(x-1) - (y-1) + o(\|(x-1, y-1)\|)$$

On en déduit, en négligeant le $o(\cdot)$:

$$f(0.9, 1.1) \approx 0.7$$

Correction 26

1. $f(x, x) = 2x^3$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, x) = \pm\infty$ donc f n'est ni majorée ni minorée.
2. $f(x, y) = (x-y)^2 + x^4 + y^4 \geq 0$ donc f admet un minimum global en $(0, 0)$ égal à 0. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, x) = +\infty$ donc f est non majorée.
3. On commence par chercher les points critiques, on cherche donc les points (x, y) vérifiant $y^2 + 2xy + 2x - 1 = 0 = x^2 + 2xy + 2y - 1$. Si (x, y) est un point critique, on a $y^2 + 2x = x^2 + 2y$ donc $(y-1)^2 = (x-1)^2$ ce qui impose $x = y$. Or $x^2 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$ implique $x = -1$ ou $x = \frac{1}{3}$ donc l'unique point critique est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ en lequel f vaut $\frac{9}{2}$. On remarque que f n'est pas majorée car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x) = +\infty$, $\frac{9}{2}$ est donc son minimum.
4. On remarque que $f(x, x) = x^3 + \ln(1 + x^2) \geq x^3$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, x) = +\infty$ et f n'est pas majorée et $f(x, x) \leq x^3 + x^2$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x^3 = -\infty$ donc f n'est pas non plus minorée.
5. On a $f(x, x) = x^5 \left(1 - \frac{2x}{3}\right) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ donc f est non minorée et $f(-x, x) = x^5 \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ donc f est non majorée.
6. On remarque tout d'abord que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, x) = +\infty$ donc f est non majorée et elle est positive sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Les points critiques sont $(1, 0)$ et $(e^{-2}, 0)$ et $f(1, 0) = 0$ donc f admet un minimum global égal à 0.
7. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, x) = +\infty$ donc f est non majorée. On cherche les points critiques, c'est-à-dire les solutions de

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) & = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) & = 0 \end{cases}$$

On doit avoir $x^3 = -y^3$ donc $x = -y$ puis $4x(x^2 - 2) = 0$ d'où trois points critiques $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. On a $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}) = -8$. On écrit ensuite

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \\ &= x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 4xy \\ &= x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2 + (\sqrt{2}x + \sqrt{2}y)^2 \\ &= (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + (\sqrt{2}x + \sqrt{2}y)^2 - 8 \\ &\geq -8 \end{aligned}$$

f admet donc un minimum global égal à -8 .

8. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, x) = +\infty$ donc f est non majorée. On cherche les points critiques c'est-à-dire les solutions de

$$\begin{cases} 2xy^2 + 2x + 4y & = 0 \\ 2x^2y + 2y + 4x & = 0 \end{cases}$$

Si (x, y) est un point critique, alors

$$\begin{cases} x^2y + y = 2xy^2 + 4y \\ xy^2 + x = 2x^2y + 4x \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} y(x^2 - 2xy - 3) & = 0 \\ x(y^2 - 2xy - 3) & = 0 \end{cases}$$

On remarque que $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ et si $xy \neq 0$, alors $x^2 = y^2$ donc $x = \pm y$. On réinjecte dans le système de départ. Pour $x = y$, on obtient $x = 0$. Pour $x = -y$, on obtient $x = 0$ ou $x = \pm 1$. On a donc 3 points critiques : $(0, 0)$, $(1, -1)$ et $(-1, 1)$. On a $f(0, 0) = 0$ et $f(1, -1) = f(-1, 1) = -1$. Par ailleurs,

$$f(x, y) = (xy + 1)^2 - 1 + (x + y)^2 \geq -1,$$

donc f admet bien un minimum global égal à -1 .

Correction 27

La fonction f admet son minimum en $(0, 0)$ et il vaut 0. On travaille sur l'ouvert

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

On détermine les points critiques, ce sont ceux dont les coordonnées vérifient

$$\begin{cases} y - 2xy - y^2 & = 0 \\ x - x^2 - 2xy & = 0 \end{cases}$$

L'unique point critique de f sur U est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Une fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes. La fonction f est continue sur T qui est fermé et borné donc f est bornée et atteint ses bornes. D'après l'étude au bord (où elle est nulle), on sait donc que son maximum est atteint à l'intérieur de T donc sur U . Le point en lequel le max est atteint est critique (appartient à un ouvert) et comme il y a un unique point critique dans U , f atteint nécessairement son maximum en ce point, il vaut $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$

Correction 28 Soit $f \in C^0(U)$. Comme U est un ouvert non vide, il contient un disque ouvert $D(p, r)$, où $p = (a, b)$.

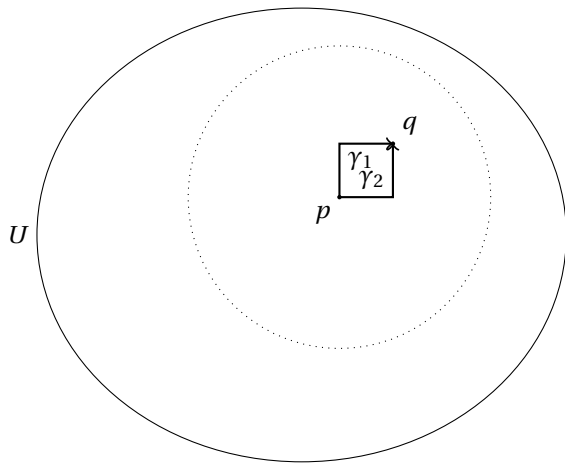
On considère les deux fonctions

$$\gamma_1 : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow D(p, r) \\ t & \longmapsto \begin{cases} (a + tr, b) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ (a + \frac{r}{2}, b + r(t - \frac{1}{2})) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

et

$$\gamma_2 : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow D(p, r) \\ t & \longmapsto \begin{cases} (a, b + tr) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ (a + r(t - \frac{1}{2}), b + \frac{r}{2}) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'il s'agit de deux fonctions continues de $[0, 1] \rightarrow D(p, r)$ (on parle aussi de *chemins*) dont les images sont disjointes, à l'exception de leurs extrémités communes p et $q = (a + \frac{r}{2}, b + \frac{r}{2}) \neq p$.



— Par composition, l'application $f \circ \gamma_1$ est continue. Elle vaut $f(p)$ en 0 et $f(q)$ en 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc trouver $t_1 \in [0, 1]$ tel que $f(\gamma_1(t_1)) = y$.

Comme y ne vaut ni $f(p)$ ni $f(q)$, on a nécessairement $t_1 \in]0, 1[$.

— De la même façon, on trouve $t_2 \in]0, 1[$ tel que $f(\gamma_2(t_2)) = y$.

D'après la remarque que nous avons faite sur les images de γ_1 et γ_2 , on a donc $\gamma_1(t_1) \neq \gamma_2(t_2)$, alors que ces deux éléments ont la même image par f , à savoir y .

On en déduit que f n'est pas injective.

— Si $f(p) = f(q)$, la fonction f n'est pas injective.

— Si $f(p) \neq f(q)$, on fixe y strictement compris entre $f(p)$ et $f(q)$.