Quatrième devoir surveillé

le 16 décembre 2023, de 8h30 à 11h30

La calculatrice est interdite. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

I Questions de cours

▶ **I.1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers un certain réel ℓ.

– **a)** Énoncer la définition de « (u_n) tend vers ℓ ».

– **b)** Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\ell > a$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N,\ u_n > a$.

II Exercice. Intégrale trigonométrique

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) - 2\cos(x) + 3}\, dx.$

▶ **II.1** Calculer I en posant le changement de variable $t = \cos(x)$.

III Exercice. Emprunt à taux fixe

Soient τ et A deux réels strictement positifs et N un entier naturel non nul.

On considère une suite de réels (u_n) telle que : $\begin{cases} u_N = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1+\tau)u_n - A. \end{cases}$

▶ **III.1** Montrer que $u_0 = \dfrac{A}{\tau}\left[1 - \dfrac{1}{(1+\tau)^N}\right].$

IV Exercice. Équations d'ordre 2

▶ **IV.1** Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

▶ **IV.2** Soit (u_n) la suite de réels définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$

Expliciter, dans $\mathbb{R}$, le terme général de la suite (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

V Problème. Analyse hyperbolique

On appelle *tangente hyperbolique* la fonction $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

▶ **V.1** Étudier les variations de la fonction th et tracer l'allure de sa courbe, en précisant les éventuelles invariances et asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

V.A Équation différentielle

▶ **V.2** Résoudre l'équation différentielle $y' + \mathrm{th}(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

▶ **V.3** Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + \mathrm{th}(x)y = x\,\mathrm{th}(x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$

V.B Primitives

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^n(t)}$.

▶ **V.4** Soit n un entier naturel non nul.

– **a)** Justifier que F_n est l'unique primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^n}$ telle que $F_n(0) = 0$.

– **b)** Étudier la parité et la monotonie de la fonction F_n.

▶ **V.5** Calculer explicitement la fonction F_1.

▶ **V.6** Calculer explicitement la fonction F_2.

▶ **V.7** Démontrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$(n+1)F_{n+2}(x) = nF_n(x) + \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{n+1}(x)}.$$

▶ **V.8** En déduire les fonctions F_3 et F_4.

V.C Limites d'intégrales

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction F_n admet une limite en $+\infty$, notée

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^n(t)} = \lim_{x \to +\infty} F_n(x).$$

▶ **V.9** Calculer I_1 et I_2.

▶ **V.10** En utilisant les résultats de la partie précédente, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+2} = \frac{n}{n+1} I_n.$$

▶ **V.11** En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{2k+1} = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

▶ **V.12** Expliciter de même I_{2k} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

VI Problème. Suite homographique

Soit α un réel positif. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs réelles et supposées distinctes de -2α, qui vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\alpha u_n - 1}{u_n + 2\alpha}.$$

VI.A Premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $\alpha = 2$ et $u_0 = 0$.

▶ **VI.1** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left]-1, +\infty\right[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

▶ **VI.2** Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.

▶ **VI.3** Expliciter alors (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Quelle est sa limite ?

VI.B Cas convergent

On suppose maintenant que $\alpha > 2$.

On note r, s les deux racines de $x^2 + \alpha x + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$, telles que $r < s$.

▶ **VI.4** Montrer que : la suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 \in \{r, s\}$.

▶ **VI.5** Étudier la monotonie de (u_n) dans les cas $r < u_0 < s$ et $u_0 > s$.

On suppose dorénavant $u_0 \notin \{r, s\}$ et on pose $w_n = \dfrac{u_n - s}{u_n - r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▶ **VI.6** Montrer que la suite (w_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\alpha - s}{\alpha - r}$.

▶ **VI.7** En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite finie, que l'on précisera.

▶ **VI.8** Expliciter (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque $\alpha = \dfrac{5}{2}$ et $u_0 = 0$.

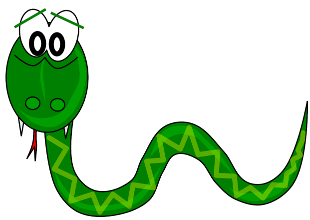
VI.C Cas divergent

On suppose enfin que $0 \leqslant \alpha < 2$.
On note $r, \overline{r}$ les deux racines de $z^2 + \alpha z + 1$ dans $\mathbb{C}$.

▶ **VI.9** Montrer qu'il existe θ, φ éléments de $]0, 2\pi[$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_n - \overline{r}}{u_n - r} = e^{i(n\theta + \varphi)}$.

▶ **VI.10** En déduire que la suite (u_n) n'admet pas de limite.

▶ **VI.11** Expliciter (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque $\alpha = 1$ et $u_0 = 0$.



FIN