Sixième devoir en temps libre

Solutions

I Comparaison de moyennes

Q.1 *Inégalité de Jensen.* Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, définie sur un intervalle I. En raisonnant par récurrence, montrer que : pour tout $n \geqslant 1$, pour tous $x_1, \dots, x_n$ dans I et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, f(x_i).$$

Solution. L'intitialisation est immédiate car $\lambda_1 = 1$ nécessairement lorsque $n = 1$. Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que l'inégalité est vraie pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$. Quitte à changer réindexer les termes, on peut supposer que $\lambda_{n+1} \neq 1$ et poser

$$\lambda_i' = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

de sorte que $\lambda_1' + \cdots + \lambda_n' = 1$. Par convexité de f, on sait que pour tout $a \in I$,

$$f\big((1 - \lambda_{n+1})a + \lambda_{n+1}x_{n+1}\big) \leqslant (1 - \lambda_{n+1}) \, f(a) + \lambda_{n+1} \, f(x_{n+1}).$$

Puisque $(1 - \lambda_{n+1})\lambda_i' = \lambda_i$, il vient donc pour $a = \lambda_1' x_1 + \cdots + \lambda_n' x_n$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant (1 - \lambda_{n+1}) \, f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' x_i\right) + \lambda_{n+1} \, f(x_{n+1})$$

On conclut alors en majorant le second membre par hypothèse de récurrence.

Q.2 Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs.

(a) Étudier la convexité de la fonction ln.

> **Solution.** Cette fonction est dérivable deux fois et $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc ln est concave.

(b) En déduire l'*inégalité arithmético-géométrique* :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

> **Solution.** Posons $f = -\ln$ et $\lambda_i = \frac{1}{n}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On obtient :
>
> $$-\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{-\ln(x_i)}{n}$$
>
> par inégalité de Jensen, ce qui revient à :
>
> $$\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$
>
> On conclut par passage à l'exponentielle (fonction croissante).

Q.3 Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$M(\alpha) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(a) Étudier, pour tout réel $\gamma > 0$, la convexité de la fonction $x \mapsto x^{\gamma}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

> **Solution.** Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $f : x \mapsto x^{\gamma}$ est dérivable deux fois :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = \gamma(\gamma - 1)x^{\gamma-2}.$$
>
> Comme $x^{\gamma-2} > 0$, la convexité est déterminée par le signe de $\gamma(\gamma - 1)$: la fonction f est convexe si $\gamma \geqslant 1$, concave si $0 < \gamma \leqslant 1$.

(b) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Jensen, que $M : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

Solution. Soient α, β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha \leqslant \beta$. Posons $\gamma = \beta/\alpha$. Alors $\gamma \geqslant 1$, donc $x \mapsto x^\gamma$ est convexe. Pour $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, on obtient :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha\right)^\gamma \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^\alpha)^\gamma$$

par inégalité de Jensen, ce qui revient à :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\beta.$$

Donc $M(\alpha) \leqslant M(\beta)$ par passage à la puissance $\frac{1}{\beta}$ (fonction croissante).

(c) Quelle est la limite de la fonction M en 0 ? en $+\infty$?

Solution. • Commençons par la limite en $+\infty$. Quitte à réindexer les termes, on peut supposer que $x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. Encadrons : pour tout $\alpha > 0$,

$$\left(\frac{x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant M(\alpha) \leqslant \left(\frac{x_n^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \text{i.e.} \quad n^{-\frac{1}{\alpha}} x_n \leqslant M(\alpha) \leqslant x_n.$$

Or $n^{-\frac{1}{\alpha}} \to 1$ lorsque $\alpha \to +\infty$, donc $M(\alpha) \to x_n$ par encadrement. Plus généralement, sans supposer les (x_i) ordonnés,

$$M(\alpha) \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

• Étudions maintenant la limite en 0, en passant d'abord au logarithme :

$$\ln M(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\varphi(\alpha)\right) \quad \text{où} \quad \varphi(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1} x_i^\alpha.$$

Lorsque $\alpha \to 0$, on aura $\varphi(\alpha) \to \dfrac{n}{n} = 1$, d'où $\dfrac{\ln(\varphi(\alpha))}{\varphi(\alpha) - 1} \to 1$. Par ailleurs,

$$\frac{\varphi(\alpha) - 1}{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\alpha\ln(x_i)} - 1}{\alpha} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i).$$

On obtient donc par produit et continuité de la fonction exponentielle :

$$M(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \exp\left(1 \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Remarque. On peut en déduire l'inégalité arithmético-géométrique, comment ?

II Problème d'analyse

A Préliminaire.

Q.1 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = e^t + e^t(b-t) + e^t\frac{(b-t)^2}{2}.$$

(a) Montrer qu'il existe $c \in \left]a,b\right[$ tel que $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \dfrac{1}{2}e^c\,(b-c)^2$.

Solution. La fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par sommes et produits :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = e^t + e^t(b-t) - e^t + e^t\frac{(b-t)^2}{2} - e^t(b-t) = e^t\frac{(b-t)^2}{2}.$$

On conclut alors par égalité des accroissements fini pour la fonction $\varphi|_{[a,b]}$:

$$\exists c \in \left]a,b\right[, \quad \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \varphi'(c).$$

(b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}e^{|x|}|x|^3$.

Solution. Avec les notations de la question précédente :

$$|\varphi(b)-\varphi(a)| = \frac{1}{2}e^c|b-c|^2|b-a| \leqslant \frac{1}{2}e^b|b-a|^3.$$

De plus $\varphi(b) = e^b$ et $\varphi(a) = e^a + e^a(b-a) + \frac{e^a}{2}(b-a)^2$.
On obtient directement l'inégalité voulue en posant $a = 0$ et $b = x$ si $x > 0$.

Pour $x < 0$, on procède de même en raisonnant sur l'intervalle $]b, a[$.

Enfin, le cas $x = 0$ est trivial.

B Étude d'une fonction

Soient a un réel et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0) = a \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Q.2 Continuité.

(a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Solution. C'est la limite d'un taux d'accroissement :

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \exp'(0) = 1.$$

(b) En déduire l'unique valeur de a telle que f soit continue en 0.

Solution. Par passage à l'inverse, la fonction f admet des limites à gauche et à droite en 0, égales à 1. Donc f est continue en 0 si, et seulement si, $a = 1$.

On supposera dans toute la suite que a est égal à cette valeur.

Q.3 Régularité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \left(\frac{g(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \right) f(x)^2 e^x.$$

Solution. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ par opérations :

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1 - e^{-x} - x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(g(x) - \frac{x^2}{2})}{(e^x - 1)^2},$$

d'où la formule demandée après factorisation du numérateur par x^2.

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \leqslant \dfrac{1}{2} e^{|x|} |x|^3$.

Solution. D'après le préliminaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|e^{-x} - 1 - (-x) - \frac{(-x)^2}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}e^{|-x|}|-x|^3.$$

(c) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{g(x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}e^{|x|}|x|$ et donc $\frac{g(x)}{x^2} \to 0$ lorsque $x \to 0$. On en déduit par opérations sur les limites et continuité de f en 0 :

$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\neq 0}]{} \left(0 - \frac{1}{2}\right) f(0)^2 e^0 = -\frac{1}{2}.$$

Puisque f est continue, le théorème de limite de la dérivée montre que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$. La dérivée f' est continue en 0 d'après la limite ci-dessus, donc f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Q.4 Allure de la courbe

(a) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a déjà vu que $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}(1 - x - e^{-x})$. Par inégalité usuelle $e^{-x} \geqslant 1 + (-x)$ avec égalité ssi $-x = 0$, donc $f'(x) < 0$. Comme $f'(0) = -\frac{1}{2}$, la dérivée f' est donc strictement négative sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(b) Dresser le tableau de variation complet de f (avec limites en $-\infty$ et en $+\infty$ notamment). *On fera apparaître la valeur en* 0.

Solution.

- Par croissances comparées en $+\infty$ et opérations sur les limites :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

- Tandis que par opérations sur les limites en $-\infty$:

$$\frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{1}{e^x - 1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty.$$

- On dresse enfin le tableau de variation :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 1 $\searrow$ 0

(c) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$. On précisera leurs positions relatives.

Solution. Ceci revient à montrer que $f(x) + x \to 0$ en $-\infty$:

$$f(x) + x = \frac{xe^x}{e^x - 1} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

car $xe^x \to 0$ par croissances et comparées, et $e^x - 1 \to -1$.

De plus, $f(x) + x > 0$ au voisinage de $-\infty$ par quotient de réels négatifs, donc la courbe est située au-dessus de cette asymptote en $-\infty$.

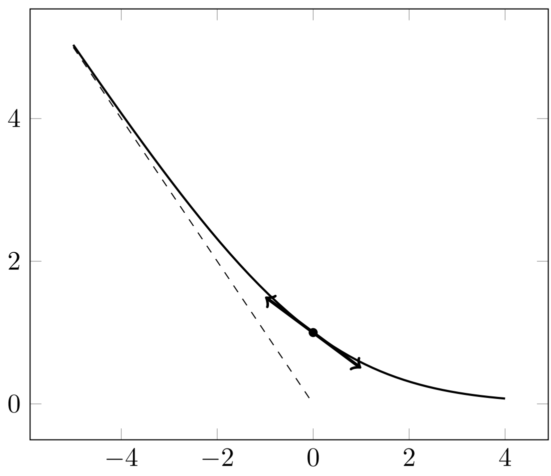
(d) Quelle est l'équation de la tangente en 0 ?

Solution. Déjà $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. D'où l'équation :

$$y = -\tfrac{1}{2}(x - 0) + 1, \quad \text{i.e.} \quad y = -\frac{x}{2} + 1.$$

(e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

Solution.



C Étude d'une suite

Q.5 Encadrement de la dérivée.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Vérifier que $f'(x) + \dfrac{1}{2}$ est du signe de $h(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.

> **Solution.** Par mise au même dénominateur :
>
> $$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$$

(b) Montrer que h est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$.

> **Solution.** La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée positive car :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2e^x(e^x - 1 - x).$$
>
> Elle est donc croissante. Or $h(0) = 0$, donc h est positive sur $\mathbb{R}_+$.

(c) En déduire que $|f'| \leqslant \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$. Que peut-on en déduire pour f ?

> **Solution.** Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $f' + \frac{1}{2}$ est positive d'après les questions précédentes, c'est-à-dire que $-|f'| + \frac{1}{2} \geqslant 0$ car on sait déjà que f' est à valeurs négatives.
>
> Par inégalité des accroissements finis, f est donc $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Q.6 Convergence. Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{e^{u_n} - 1}$$

(a) Justifier que cette suite est bien définie et à termes strictement positifs.

> **Solution.** D'après les variations, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \; f(x) \in \left]0, 1\right[$. L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est donc f-stable. Il contient u_0 donc la suite (u_n) est bien définie par récurrence et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}$, qu'on explicitera.

> **Solution.** $f(0) = 1$ donc 0 n'est pas point fixe. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,
>
> $$f(x) = x \iff x = x(e^x - 1) \iff 1 = e^x - 1 \iff x = \ln 2.$$

L'unique point fixe est donc $\alpha = \ln 2$.

(c) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne,

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \tfrac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

On conclut en remarquant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$.

(d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Solution. Par récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

Or $(\frac{1}{2})^n \to 0$ car $|\frac{1}{2}| < 1$. Donc $u_n \to \alpha$ par domination.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \ln 2}.$$