Sujet d'entraînement (DS 7)
Analyse asymptotique et espaces vectoriels

I Exercice

Calculer les développements limités suivants à l'ordre et au point indiqués.

Q.1 $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto e^x \operatorname{Arctan} x$.

Q.2 $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Q.3 $DL_2(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\tan x}$.

Q.4 $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $f : x \mapsto \cos x + \sin x$.

II Exercice

Soit la fonction $f : x \longmapsto (x^2-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ définie de $]1,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Q.5 Étudier les limites de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ et lorsque $x \to 1$.

Q.6 Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction

$$g : x \longmapsto \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Q.7 Montrer que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

III Exercice

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$, on considère les sous-ensembles :

$$F = \{\alpha X^4 + (\alpha+\beta)X + \beta \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\},$$
$$G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P'(1) = 0\}.$$

Q.8 Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$.

Q.9 *Étude de F.*

- **(a)** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
- **(b)** Déterminer une base de F. En déduire sa dimension.

Q.10 *Étude de G.*

- **(a)** Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
- **(b)** Prouver que $\dim G \leqslant 4$.
- **(c)** Montrer que $(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une famille libre.
- **(d)** En déduire la dimension de G, puis une base de G.

Q.11 *Étude de $F+G$.*

- **(a)** Démontrer que $F \cap G = \mathrm{Vect}(X^4 - 4X - 5)$
- **(b)** Déterminer les dimensions de $F \cap G$ et $F + G$.
- **(c)** Que peut-on en déduire pour $F+G$? La somme est-elle directe ?

Q.12 Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$. On admet que H est un sous-espace vectoriel de G.

- **(a)** Montrer que H est de dimension 3.
- **(b)** Montrer que $F \cap H \subset F \cap G$.
- **(c)** En déduire que F et H sont supplémentaires dans E.

IV Exercice

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soit $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ la famille de vecteurs définie par :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad u_i = e_i + e_{i+1} \quad \text{et} \quad u_n = e_n + e_1.$$

Q.13 Montrer que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ est libre.

Q.14 Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i u_i = ((-1)^n - 1)\, e_1$.

Q.15 On suppose que n est *pair*. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{U}$.

Q.16 On suppose que n est *impair* et on pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

(a) Montrer que F contient le vecteur e_1, ainsi que $e_2, \ldots, e_n$.

(b) En déduire que $\mathcal{U}$ est une base et exprimer les coordonnées des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ dans la base $\mathcal{U}$.

V Exercice

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x \,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Q.17 La fonction tangente hyperbolique th : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par th : $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$. Montrer que $\mathrm{th}' < 1$ sur $\mathbb{R}^*$ puis en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{th}\, x < x.$$

Q.18 En déduire le tableau de variation de f. Déterminer les limites aux bornes.

Q.19 Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $u \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\, u}{u}$.

Q.20 En déduire des réels $a_0, a_1, \ldots, a_4$ tels que :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Q.21 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $f(x) = \dfrac{n+1}{n}$.

(a) Montrer que cette équation admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

(c) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

Q.22 **(a)** Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Déterminer un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.