Rappels (et compléments) autour du second degré

Dans toute la suite, on considère le trinôme[1] $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$.[2]

Forme canonique

- Il a été démontré au lycée que le trinôme peut s'écrire :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

  L'une ou l'autre de ces formes est qualifiée de **forme canonique** du trinôme : c'est une forme intermédiaire entre la forme développée et la forme factorisée. Tous les résultats concernant le trinôme (ou les équations du second degré) sont établis à partir de cette forme canonique.

  La forme précédente n'est pas à retenir par cœur, mais il est en revanche impératif de savoir pratiquement comment l'obtenir.

- **Méthode pratique**
  - **Cas où $a = 1$**
    - ▶ Mise sous forme canonique de $f_1(x) = x^2 - 6x + 8$.
      L'idée consiste à considérer les deux premiers termes en x du trinôme comme le début d'un carré.
      Ici, $x^2 - 6x$ est le début de $(x-3)^2$: $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 3^2$ (pour équilibrer l'égalité, on retranche 3^2, dernier terme du développement de $(x-3)^2$).
      On a : $\boldsymbol{f_1(x)} = (x-3)^2 - 9 + 8 \boldsymbol{= (x-3)^2 - 1}$: forme canonique de f_1.

      Remarquons que la forme canonique permet d'observer que $f_1(x)$ est factorisable dans $\mathbb{R}$.
      On a : $f_1(x) = (x-3)^2 - 1^2 = (x-3-1)(x-3+1) = (x-4)(x-2)$.
  - **Cas où $a \neq 1$**
    - ▶ Mise sous forme canonique de $f_2(x) = 2x^2 - x - 10$.
      On commence par factoriser le trinôme par a (ici $a = 2$) puis on applique la technique précédente.

      On a : $f_2(x) = 2\left[x^2 - \frac{1}{2}x - 5\right]$

      $= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 5\right]$ $\quad \left(x^2 - \frac{1}{2}x \text{ est le début de } \left(x - \frac{1}{4}\right)^2\right)$[3]

      $\boldsymbol{= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\right] = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{81}{8}}$: forme canonique de f_2.

      Remarquons là encore que la forme canonique permet d'observer que $f_2(x)$ est factorisable dans $\mathbb{R}$.
      On a : $f_2(x) = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2\right] = 2\left[\left(x - \frac{1}{4} - \frac{9}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} + \frac{9}{4}\right)\right] = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x+2) = (2x-5)(x+2)$.

    - ▶ Mise sous forme canonique de $f_3(x) = -x^2 + 3x - 5$.
      On a : $f_3(x) = -\left[x^2 - 3x + 5\right]$

      $= -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5\right]$

      $\boldsymbol{= -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right] = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}}$: forme canonique de f_3.

      Remarquons que la forme canonique permet cette fois d'observer que $f_3(x)$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$ (somme de deux quantités négatives, dont l'une l'est strictement).

Racines, factorisation et signe du trinôme

- C'est à partir de la forme canonique qu'on obtient les formules donnant les racines d'un trinôme (ou d'une équation du second degré) en fonction du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. Nous ne les rappelons pas ici, nous contentant d'étudier quelques exemples et d'énoncer une mise en garde.
  - ▶ Racines de $f_1(x) = -2x^2 - 6x - 3$
    On calcule $\Delta = (-6)^2 - 4(-2)(-3) = 36 - 24 = 12$ (avec $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$).
    Le trinôme admet deux racines : $\boldsymbol{x_1} = \frac{6-2\sqrt{3}}{-4} \boldsymbol{= \frac{-3+\sqrt{3}}{2}}$ et $\boldsymbol{x_2} = \frac{6+2\sqrt{3}}{-4} \boldsymbol{= \frac{-3-\sqrt{3}}{2} = -\frac{3+\sqrt{3}}{2}}$.

---

1. On parle également de *trinôme du second degré* ou de *fonction polynomiale du second degré.*
2. Dans le cas des fonctions polynomiales, on s'autorisera à écrire « on considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$. »
3. Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x^2 + \alpha x$ est le début de $\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2$.

- ▶ Racines de $f_2(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$
  On calcule $\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4(2)(1) = 8 - 8 = 0$.
  Le trinôme admet une racine double : $\boldsymbol{x_0} = \frac{2\sqrt{2}}{4} \boldsymbol{= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$.
- ▶ Racines de $f_3(x) = \pi x^2 - 6x + 3$
  On calcule $\Delta = (-6)^2 - 4(\pi)(3) = 36 - 12\pi = 12(3 - \pi)$ soit $\Delta < 0$: le trinôme n'admet donc pas de racine réelle.

Attention, comme vont l'illustrer les exemples qui suivent, il est des cas où le calcul de Δ est à prohiber (il serait extrêmement maladroit).

- ▶ Résoudre $(\mathrm{E}_1) : -3x^2 + 5x = 0$ (cas où $c = 0$)
  On a : $(\mathrm{E}_1) \iff x(-3x + 5) = 0$
  $\iff x = 0$ ou $-3x + 5 = 0$
  $\iff x = 0$ ou $x = \frac{5}{3}$ soit $\boldsymbol{\mathcal{S}_1 = \{0\,;\frac{5}{3}\}}$
- ▶ Résoudre $(\mathrm{E}_2) : 5x^2 - 3 = 0$ (cas où $b = 0$)
  On a : $(\mathrm{E}_2) \iff x^2 = \frac{3}{5}$
  $\iff x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ soit $\boldsymbol{\mathcal{S}_2 = \left\{\sqrt{\frac{3}{5}}\,; -\sqrt{\frac{3}{5}}\right\}}$
- ▶ Résoudre $(\mathrm{E}_3) : -2x^2 - 1 = 0$ (cas où $b = 0$)
  On a : $(\mathrm{E}_3) \iff x^2 = -\frac{1}{2}$ soit $\boldsymbol{\mathcal{S}_3 = \varnothing}$
- ▶ Résoudre $(\mathrm{E}_4) : -3(2x - 1)^2 + 9 = 0$ (équation écrite sous forme canonique : inutile de développer !)
  On a : $(\mathrm{E}_4) \iff (2x - 1)^2 = 3$
  $\iff 2x - 1 = \sqrt{3}$ ou $2x - 1 = -\sqrt{3}$
  $\iff x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ soit $\boldsymbol{\mathcal{S}_4 = \left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}}$

Dans les quatre équations précédentes on a utilisé la proposition suivante :

Proposition : Résolution de $\boldsymbol{X^2 = m}$

On considère l'équation $(\mathrm{E}_m) : X^2 = m$ de paramètre m réel :

- si $m > 0$, (E_m) admet deux solutions : $\sqrt{m}$ et $-\sqrt{m}$;
- si $m = 0$, (E_m) admet 0 pour unique solution ;
- si $m < 0$, (E_m) n'admet pas de solution.

- C'est également à partir de la forme canonique qu'on obtient, quand elle est possible, la factorisation du trinôme à l'aide de facteurs du premier degré.

Factorisation du trinôme

On considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- si f admet deux racines x_1 et x_2 (cas $\Delta > 0$) alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si f admet une racine double x_0 (cas $\Delta = 0$) alors $f(x) = a(x - x_0)^2$;
- si f n'admet aucune racine (cas $\Delta < 0$) alors $f(x)$ n'est pas factorisable (dans $\mathbb{R}$) à l'aide de facteurs du premier degré.

On reprend à titre d'illustration les exemples précédents.

- ▶ On a vu que $f_1(x) = -2x^2 - 6x - 3$ admet comme racines $x_1 = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = -\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
  On a donc : $\boldsymbol{f_1(x)} = -2\left(x - \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\right) \boldsymbol{= -2\left(x + \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)}$.
- ▶ On a vu que $f_2(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ admet $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ comme racine double.
  On a donc : $\boldsymbol{f_2(x) = 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(2x - \sqrt{2}\right)^2}$.
- ▶ On a vu que $f_3(x) = \pi x^2 - 6x + 3$ n'admet aucune racine réelle : **$\boldsymbol{f_3(x)}$ n'est donc pas factorisable à l'aide de facteurs du premier degré**.

- On se place dans le cas où le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2.
  On a donc : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right]$.
  En notant $S = x_1 + x_2$ la somme des racines et $P = x_1x_2$ le produit des racines, $f(x) = ax^2 - aSx + aP$.
  Comme par ailleurs $f(x) = ax^2 + bx + c$, on obtient par identification des coefficients : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Proposition : Somme et produit des racines

On se place dans le cas où le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes.

En notant S la somme de ces racines et P leur produit, on a : $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$.

Application : cas d'une « racine évidente »

Il arrive parfois qu'un trinôme ou une équation du second degré admette une racine très simple : on parle de **racine évidente**. Dans ce cas, la seconde racine se trouve en utilisant (par exemple) le produit des racines.

- Factorisation de $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$.
  On observe que 1 est racine de f. L'autre racine x_2 vérifie : $1 \times x_2 = \frac{-5}{2}$ soit $x_2 = -\frac{5}{2}$.
  On a donc : $\boldsymbol{f(x) = 2(x-1)(x+\frac{5}{2}) = (x-1)(2x+5)}$.
- Résolution de (E) : $2025x^2 + 2024x - 1 = 0$.
  On observe que -1 est racine de (E).
  L'autre racine x_2 vérifie : $-1 \times x_2 = \frac{-1}{2025}$ soit $x_2 = \frac{1}{2025}$ et $\boldsymbol{\mathcal{S} = \{-1\,;\,\frac{1}{2025}\}}$.

- À partir de la forme canonique puis de l'éventuelle factorisation, on peut déterminer le signe du trinôme.

Signe du trinôme

Le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a, sauf entre les racines distinctes, quand elles existent [4].

- Résoudre $(\mathrm{I}_1) : -2x^2 - 6x - 3 \geqslant 0$
  On a vu que $f_1(x) = -2x^2 - 6x - 3$ admet comme racines $x_1 = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = -\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
  D'où, compte tenu de $a = -2$ (soit $a < 0$), $\boldsymbol{\mathcal{S}_1 = \left[-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right]}$. [5]
- Résoudre $(\mathrm{I}_2) : 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 > 0$
  On a vu que $f_2(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ admet $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ comme racine double.
  D'où, compte tenu de $a = 2$ (soit $a > 0$), $\boldsymbol{\mathcal{S}_2 = \left]-\infty\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}\,;+\infty\right[} = \mathbb{R}\backslash\boldsymbol{\{\frac{\sqrt{2}}{2}\}}$. [6]
- Résoudre $(\mathrm{I}_3) : \pi x^2 - 6x + 3 \geqslant 0$
  On a v que $f_3(x) = \pi x^2 - 6x + 3$ n'admet aucune racine réelle.
  D'où, compte tenu de $a = \pi$ (soit $a > 0$), $\boldsymbol{\mathcal{S}_3 = \mathbb{R}}$.

On déduit de la résolution de $X^2 = m$ ($\Longleftrightarrow X^2 - m = 0$) et du signe du trinôme, la proposition suivante :

Proposition : Résolution de $\boldsymbol{X^2 \geqslant m}$ et $\boldsymbol{X^2 < m}$

Considérant m, paramètre réel strictement positif ($m > 0$), on a :
- $X^2 \geqslant m \Longleftrightarrow X \in \left]-\infty\,;-\sqrt{m}\right] \cup \left[\sqrt{m}\,;+\infty\right[$;
- $X^2 < m \Longleftrightarrow X \in \left]-\sqrt{m}\,;\sqrt{m}\right[$.

- Résoudre $(\mathrm{I}_1) : 3x^2 - 5 \leqslant 0$
  On a $(\mathrm{I}_1) \Longleftrightarrow x^2 < \frac{5}{3}$ soit $\boldsymbol{\mathcal{S}_1 = \left[-\sqrt{\frac{5}{3}}\,;\sqrt{\frac{5}{3}}\right]}$.
- Résoudre $(\mathrm{I}_2) : (-2x+1)^2 > 8$
  On a : $(\mathrm{I}_2) \Longleftrightarrow (-2x+1) < -2\sqrt{2}$ ou $(-2x+1) > 2\sqrt{2}$ $\quad(\sqrt{8} = 2\sqrt{2})$
  $\Longleftrightarrow -2x < -1 - 2\sqrt{2}$ ou $-2x > -1 + 2\sqrt{2}$
  $\Longleftrightarrow x > \frac{1}{2} + \sqrt{2}$ ou $x < \frac{1}{2} - \sqrt{2}$ soit $\boldsymbol{\mathcal{S}_2 = \left]-\infty\,;\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} + \sqrt{2}\,;+\infty\right[}$.

4. Dans ce cas ($\Delta > 0$), on retiendra que « le trinôme est du signe de a à l'*extérieur des racines* ».
5. On cherche donc les réels pour lesquels le trinôme est du signe de $-a$: ils sont *entre les racines* (attention à l'ordre des racines : $x_2 < x_1$).
6. Pour tous les réels x excepté la racine, $f_2(x) > 0$.

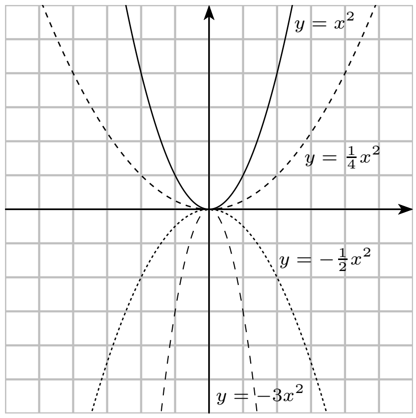
Aspect graphique

- Le plan est désormais rapporté à un repère $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

> **Courbe représentative d'un trinôme**
> La courbe représentative du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la **parabole** $\boldsymbol{\mathscr{P} : y = ax^2 + bx + c}$.
> Ses caractéristiques sont les suivantes :
> - $\mathscr{P}$ est tournée vers le haut si $a > 0$, tournée vers le bas si $a < 0$;
> - la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ est axe de symétrie de $\mathscr{P}$;
> - $\mathscr{P}$ admet pour sommet le point $\mathrm{S}\left(-\frac{b}{2a}\,;f(-\frac{b}{2a})\right)$.

Par ailleurs, comme nous l'illustrons ci-contre, notons que plus $|a|$ est grand (resp. petit), plus la parabole est resserrée (resp. évasée).
On a tracé ici quatre paraboles du type $y = ax^2$ ($a \in \mathbb{R}^*$), de même sommet O :
- $y = \frac{1}{4}x^2$ $(a = \frac{1}{4})$
- $y = -\frac{1}{2}x^2$ $(a = -\frac{1}{2})$
- $y = x^2$ $(a = 1)$
- $y = -3x^2$ $(a = -3)$

Comme $\left|\frac{1}{4}\right| < \left|-\frac{1}{2}\right| < |1| < |-3|$, ces 4 paraboles ont été précédemment ordonnées de la plus évasée à la moins évasée (ie. la plus resserrée).

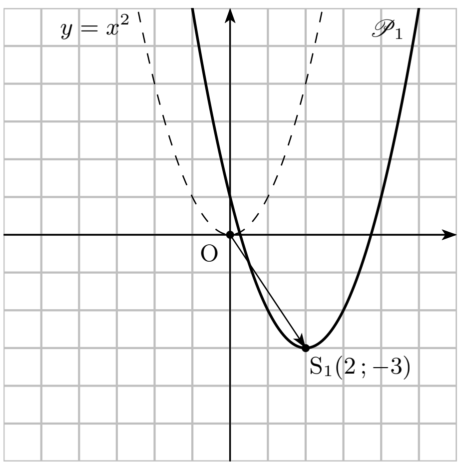


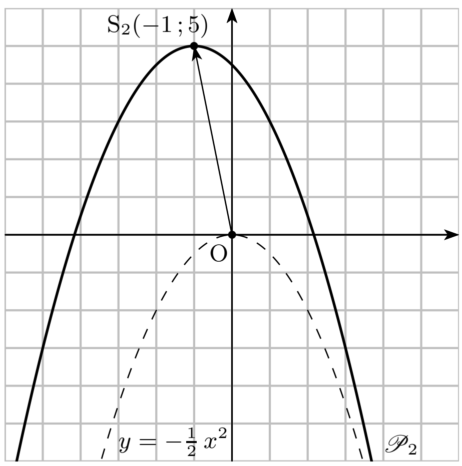
- **Tracé de la parabole**

Une nouvelle fois, la forme canonique va permettre de très rapidement donner l'allure d'une parabole.

► Tracé de $\mathscr{P}_1 : y = x^2 - 4x + 1$ (on notera $f_1(x) = x^2 - 4x + 1$).
On a sans peine, $f_1(x) = (x-2)^2 - 3$ (forme canonique de $f_1(x)$).[7]
Notons $\mathrm{S}_1(2\,;-3)$ le sommet de $\mathscr{P}_1$ et $\mathcal{R}_1$ le repère $\mathcal{R}_1 = (\mathrm{S}_1, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit M un point du plan, de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, de coordonnées (X, Y) dans $\mathcal{R}_1$.
On a : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{\mathrm{S_1M}} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OS_1}} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, d'où $\overrightarrow{\mathrm{S_1M}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OS_1}} = (x-2)\vec{\imath} + (y+3)\vec{\jmath}$.
On en déduit que $X = x - 2$ et $Y = y + 3$: formules de changement de repère.
On a alors : $\mathrm{M} \in \mathscr{P}_1 \iff y = (x-2)^2 - 3$ (équation de $\mathscr{P}_1$ dans le repère $\mathcal{R}$)
$\iff Y = X^2$: c'est l'équation de $\mathscr{P}_1$ dans le repère $\mathcal{R}_1$.
Il en découle que $\mathscr{P}_1$ **se déduit de la parabole** $\boldsymbol{y = x^2}$ **par translation de vecteur** $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OS_1}} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}}$.

► Tracé de $\mathscr{P}_2 : y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}$, (on notera $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}$).
On a sans peine, $f_2(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 5$ (forme canonique de $f_2(x)$).
En notant $\mathrm{S}_2(-1\,;5)$ le sommet de $\mathscr{P}_2$, on montrerait comme précédemment que $\mathscr{P}_2$ **se déduit de la parabole** $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2}$ **par translation de vecteur** $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OS_2}} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}}$.





7. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geqslant 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) \geqslant -3$ soit $f_1(x) \geqslant f_1(2)$ (car $f_1(2) = -3$) : f_1 admet un minimum atteint en 2 qui vaut $f_1(2) = -3$ (à associer avec $\mathrm{S}_1\left(-\frac{b}{2a}\,;f_1(-\frac{b}{2a})\right)$ sommet de $\mathscr{P}_1$, parabole tournée vers le haut).